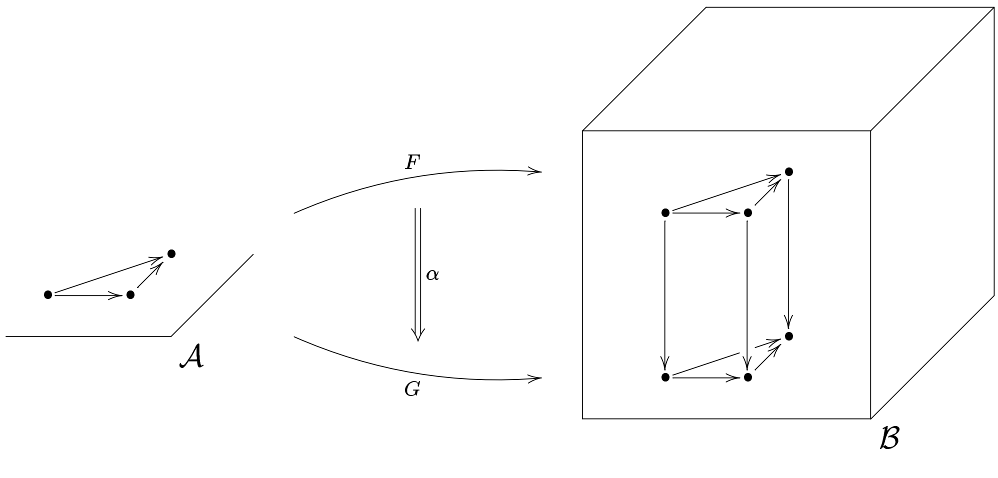
Matthieu Amiguet

Introduction à la

Théorie des Catégories



Travail de diplôme de mathématicien
Université de Neuchâtel

Ce texte a été composé durant le premier semestre de l'année 1998 sous LaTeX. Toute la partie graphique a été réalisée au moyen de l'extension XY-pic, à l'exception des figures 9.1 et 9.2, qui ont été produites par Gnuplot.

À Christoph Soland,
qui a su éveiller
— et entretenir —
ma passion des
mathématiques.

Préface

Lorsque S. Eilenberg et S. MacLane ont publié, en 1945, leur *General Theory of Natural Equivalences*, marquant ainsi le coup d'envoi de la théorie des catégories, ce texte a provoqué dans la communauté mathématique d'alors des réactions vives et contrastées. La puissance des moyens utilisés a fait déclarer à N. Steenrod que jamais aucun texte n'avait plus influencé sa pensée que celui-ci. D'un autre côté, la simplicité des raisonnements présentés a provoqué le dédain de P.A. Smith, par exemple, qui a prétendu n'avoir jamais rien lu de plus trivial de toute sa vie...

Rétrospectivement, on peut dire que les deux réactions étaient justifiées. En effet, un demi-siècle plus tard, les concepts catégoriels ont pris une telle importance dans le langage mathématique qu'ils sont devenus tout à fait irremplaçables. Pourtant, la merveilleuse simplicité des preuves maniant ces concepts permet d'oublier, finalement, que cette théorie comprend autre chose que des définitions [1].

Néanmoins, il n'est pas facile de contempler la simplicité et la puissance des catégories. En effet, la théorie est d'une très grande abstraction et ceci rebute le néophyte. Pour remédier à cela, certains auteurs ont tenté de présenter cette matière de manière intuitive et informelle. Malheureusement, cette méthode ne permet généralement pas d'accéder à toute la puissance des notions catégorielles, car celle-ci repose justement sur l'abstraction.

D'autres ouvrages, destinés généralement aux mathématiciens, renoncent résolument à toute forme de compréhension intuitive pour une présentation purement formelle, dans la ligne “Bourbaki”. Cette approche est généralement incompréhensible pour qui n'a pas une solide culture mathématique.

Le désarroi de J. Sallantin ([Sal97]) montre bien la difficulté de faire une bonne présentation des bases de la théorie des catégories :

> Quand on veut apprendre à ses lecteurs les catégories, on leur enseigne les diagrammes canoniques des égalisateurs, des limites, des produits cartésiens et on leur montre les relations qui les lient [...]
>
> Et on n'a plus de lecteurs !

Pourtant, de plus en plus de gens dans les disciplines scientifiques les plus diverses voient dans la théorie des catégories un langage puissant et prometteur. Il devient donc nécessaire d'ouvrir le dialogue et de mettre les outils catégoriels à la disposition du monde scientifique. En échange, les mathématiciens pourraient bien découvrir une richesse insoupçonnée dans l'application de concepts qu'ils croient connaître...

Le but de mon mémoire est de proposer une introduction abordable mais précise à la théorie des catégories. Destiné à des scientifiques, mais pas forcément mathématiciens, ce texte est

1. Apprenant que j'écrivais un mémoire sur la théorie des catégories, plusieurs de mes collègues ont répondu : “Ah, bon, c'est une théorie ?”

avant tout constitué d'une présentation formelle des concepts catégoriels. Cependant, les idées les plus importantes sont également abordées sous un angle plus intuitif, qui devrait vous permettre de mieux les *sentir* sans perdre l'abstraction qui fait leur force.

La première partie de ce texte présentera les notions essentielles de la théorie. Les bases (catégories, foncteurs, transformations naturelles, limites, ...) seront présentées assez en détail ; puis viendra une introduction plus succincte à quelques concepts sophistiqués comme l'adjonction, les catégories cartésiennes closes ou les topoi.

La deuxième partie illustrera ces notions par une introduction à la théorie des *systèmes évolutifs avec mémoire* de A. Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch. Ceci permettra de voir comment les concepts abstraits de la première partie peuvent trouver une signification en dehors des mathématiques.

Si vous n'êtes pas mathématicien, il est vraisemblable que la lecture de ce mémoire vous demandera quelques efforts ; cependant, mon but tout au long de la rédaction a été de réduire ces efforts autant qu'il m'était possible de le faire. Si cela pouvait vous aider à entrer dans le monde fascinant des catégories... j'en serais comblé.

Remerciements

Je tiens à remercier U. Suter et J.-P. Müller, codirecteurs de mémoire, de leur disponibilité et de l'aide qu'ils m'ont apportée, chacun dans son domaine, tout au long de la conception de ce texte.

Merci aussi au groupe de recherche de J.-P. Müller — composé de A. Berner, F. Bourquin, Y. Faihe et L.-L. Salvador — pour avoir courageusement écouté mes exposés sur certaines parties de ce mémoire. Leurs remarques, questions et commentaires à ces occasions m'ont aidé à rendre ce texte aussi clair et cohérent que possible.

Merci également à G. Cerrito, qui n'a pas ménagé sa peine pour me fournir les documents dont j'avais besoin pour ma rédaction — et qui m'a toujours patiemment rappelé les délais de rédition des ouvrages empruntés, m'évitant ainsi un explosion des frais d'amende...

Enfin, un grand merci à Barbara Minder pour son constant soutien moral pendant la rédaction de ce mémoire, et pour sa patience lorsque mon enthousiasme me poussait à lui parler toute une soirée durant des finesses d'une théorie dont elle ne connaissait pas les rudiments...

Table des matières

Première partie

Introduction à la théorie des catégories

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Présentation

Comme je l'ai dit dans la préface, on attribue la paternité de la théorie des catégories à Eilenberg et Mac Lane, dans les années 40. Il serait cependant injuste de négliger les contributions importantes de nombreux autres mathématiciens comme Kelly, Lawvere, Kan, Yoneda, Ehresmann et bien d'autres.

Cette théorie a très vite rencontré un grand succès parmi les mathématiciens, qui l'ont rapidement intégrée à leur vocabulaire ; en effet, il s'est avéré que les catégories fournissent un cadre adéquat pour généraliser des opérations très courantes en mathématiques. La théorie des catégories se présente donc comme une théorie *unificatrice* en mathématiques : plutôt que de définir de nombreuses notions similaires pour les ensembles, les groupes, les anneaux, les espaces vectoriels, les espaces topologiques, etc., on définit *une* notion pour les catégories qui comporte toutes les autres comme cas particuliers.

Un peu plus tard, Lawvere a même proposé d'utiliser cette théorie comme fondation des mathématiques ([Law66]). Ce texte, alliant une grande rigueur à une inventivité hors norme, a marqué plus d'un mathématicien [1].

Pour un non-mathématicien, il n'est pas facile de saisir quels sont les concepts que la théorie des catégories généralise. C'est pourquoi je présenterai au paragraphe 1.3 une démarche algébrique typique qui trouve une généralisation directe en théorie des catégories.

Depuis quelques années, la théorie des catégories commence à apparaître à l'extérieur des mathématiques. En effet, elle présente un intérêt non négligeable pour certaines branches : elle permet de parler d'objets non pas en termes de leur structure interne, mais en termes de leurs *interactions*. Les objets forment une sorte de boîte noire ; seuls leurs échanges sont accessibles au catégoricien.

Considérons par exemple le produit cartésien de deux ensembles. L'approche “classique” définit le produit $A \times B$ des ensembles A et B comme l'ensemble dont les éléments sont de la forme (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$. Nous verrons au chapitre 6 que la théorie des catégories permet de caractériser $A \times B$ *uniquement à partir de ses interactions avec les autres ensembles.*

Mais, comme je l'ai déjà relevé, ce qui fait la force de cette théorie en fait aussi la difficulté : la théorie des catégories est TRÈS abstraite ! C'est peut-être pour cette raison qu'elle est encore peu connue hors mathématiques.

1. Par exemple, Gil Henriquès le décrit comme un texte ayant changé sa vie...

L'abstraction poussée à ce point-là fait peur ; pourtant, je vous encourage à faire l'effort des premiers pas, car cela permet de découvrir une théorie très puissante et — à mon humble avis — très élégante...

1.2 Prérequis

J'ai essayé de rendre ce texte accessible à des non mathématiciens. Ceci dit, je suppose tout de même une culture mathématique de base concernant les ensembles et les notions relatives (fonctions, produit cartésien, injectivité et surjectivité, etc.)

Il est souhaitable — pour ne pas dire indispensable — pour lire ce texte d'avoir une certaine habitude du raisonnement abstrait. Le paragraphe 1.3 de cette introduction donne une idée du genre de langage utilisé ici. Si vous rencontrez de grandes difficultés à la lecture de ce paragraphe, je vous conseille de vous référer à [LS97] ; ce texte, d'une grande valeur pédagogique, vous évitera de tomber dans la plupart des pièges qui guettent le débutant...

La théorie présentée ici étant à la base une théorie des structures mathématiques, il est clair qu'une connaissance de celles-ci sera un atout. Ainsi, si vous êtes familier avec les groupes, les anneaux, les corps, les espaces vectoriels ou topologiques, ou d'autres structures du même genre, essayez d'appliquer systématiquement les notions que je présente à ces différents domaines et de voir ce que cela donne. Cependant, je ne ferai que très peu d'allusions à ces structures et me contenterai d'utiliser celles que je définis dans ce texte.

1.3 Monoïdes

Ce paragraphe présente des notions algébriques typiques dans le cas d'une structure simple, appelée *monoïde*. Entrons tout de suite dans le vif du sujet :

1.3.1 Définition et exemples

Définition 1. Un *monoïde* est un ensemble M muni d'une opération binaire $*$ — c'est à dire une fonction $* : M \times M \to M$ — associative et admettant un élément neutre.

Quelques remarques s'imposent :

Opération binaire On note généralement $x * y$ au lieu de $*(x, y)$ l'opération du monoïde. Ceci indique le projet de généraliser quelque chose comme l'addition ou la multiplication.

Associativité Dire que $*$ est associative signifie que

$$(x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall x, y, z \in M$$

et donc que l'on peut écrire $x * y * z$ sans ambiguïté.

Élément neutre Un élément neutre pour $*$ est un élément $e \in M$ vérifiant

$$e * x = x * e = x \quad \forall x \in M.$$

Le chapitre 2 définira la notion centrale de ce texte — celle de catégorie — qui est en un certain sens une généralisation de celle de monoïde.

Quelques exemples permettront de mieux cerner cette notion.

Entiers naturels L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels porte (au moins) deux structures courantes de monoïdes : d'une part, l'addition usuelle $+$ avec 0 pour élément neutre, et d'autre part la multiplication habituelle avec 1 pour élément neutre. Nous appellerons ces deux monoïdes *monoïde additif (resp. multiplicatif) des nombres naturels.*

Le monoïde libre élémentaire Considérons l'ensemble A^* formé de chaînes de "a" de longueur arbitraire (y compris la "chaîne vide" $<>$)

$$A^* = \{<>, a, aa, aaa, aaaa, ...\}.$$

On peut définir une structure de monoïde sur A^* en prenant pour opération $*$ la *concaténation* ; par exemple, on a $aa * aaa = aaaaa$. L'élément neutre est alors la chaîne vide $<>$. Nous appellerons ce monoïde le *monoïde libre élémentaire.*

Si l'on y réfléchit un peu, on se rend compte que le monoïde additif des nombres naturels et le monoïde libre élémentaire se ressemblent beaucoup. Le nom des éléments change, mais la structure est la même. Cette situation se décrit en disant qu'ils sont *isomorphes.* Nous verrons au chapitre 2 une définition très générale de la notion d'isomorphisme, qui englobe celle-ci.

1.3.2 Homomorphismes de monoïdes

Une fois que l'on a défini une structure, on peut s'intéresser aux transformations qui "respectent" cette structure. Cette démarche est au centre de l'approche catégorielle.

Définition 2. Soient M et N des monoïdes. Une fonction $f : M \to N$ est un *homomorphisme de monoïdes* si elle vérifie les propriétés suivante :

$$f(x * y) = f(x) * f(y) \quad \forall x, y \in M$$

et

$$f(e_M) = e_N.$$

Par exemple, la fonction qui envoie chaque élément du monoïde libre élémentaire sur sa longueur est un homomorphisme si l'on considère la structure additive sur $\mathbb{N}$, mais pas si l'on considère la structure multiplicative.

Les chapitres 3 et 5 seront consacrés à deux types fondamentaux de transformations de structures : les foncteurs et les transformations naturelles.

1.3.3 Produits de monoïdes

Soient M et N deux monoïdes. On peut munir le produit cartésien $M \times N$ d'une structure de monoïde de la manière suivante :

$$(x, y) * (x', y') = (x * x', y * y').$$

L'élément neutre est alors (e_M, e_N).

Le chapitre 4 proposera des constructions de ce genre pour les catégories. Nous reviendrons sur ce sujet au chapitre 6, mais dans un cadre beaucoup plus abstrait et général qui englobe tous ces cas particuliers.

1.3.4 Monoïdes libres

Étant donné un ensemble E, on peut construire l'ensemble E^* des "chaînes d'alphabet E". Par exemple, si $E = \{a, b, c\}$, alors $aab, abc, bcab, bbbbb$ sont tous des éléments de E^*. On peut munir E^* d'une structure de monoïde en prenant la concaténation comme opération, comme dans le cas du monoïde libre élémentaire.

Le monoïde ainsi obtenu s'appelle *monoïde libre sur E*.

Cette construction est un cas particulier d'une situation très générale, l'*adjonction*, qui sera l'objet du chapitre 8.

1.4 Remarques

Le paragraphe précédent m'a permis de donner un aperçu de presque tous les chapitres de cette première partie. Pour compléter, je dirai que le chapitre 7 présente un autre point de vue sur les constructions du chapitre 6, et que les chapitres 9 et 10 forment une introduction aux rapports complexes entre logique et théorie des catégories.

Deux ouvrages m'ont servi de référence pour la rédaction de cette partie théorique : d'une part [BW90], et d'autre part [Mac71].

Le premier, destiné avant tout aux informaticiens, est un remarquable ouvrage didactique. Les notions sont présentées clairement et très progressivement. Je vous recommande cet ouvrage comme premier recours si vous désirez en savoir plus que ce qui se trouve dans mon travail.

Quant à [Mac71], c'est une référence incontournable de la théorie des catégories. Très complet [2], ce texte est cependant d'une lecture un peu ardue pour un non mathématicien (et parfois même pour un mathématicien !)

Un autre livre très recommandable me semble être [LS97]. Si mon texte ne s'y réfère que très peu, c'est parce que je n'en ai eu connaissance que dans les dernières semaines de ma rédaction...

Je désire encore faire une remarque sur le style de ce travail. Une présentation mathématique doit bien sûr se faire dans un style formel et précis. C'est seulement ainsi que l'on peut avoir accès à la pleine puissance de l'abstraction ; en effet, il n'est pas rare qu'un résultat conceptuellement difficile se démontre en deux lignes de formalisme abstrait. Cependant, si un texte se limite à ce niveau-là, il devient vite difficile à lire (c'est par exemple le cas de [Mac71]). Comme je l'ai dit dans la préface, mon but est de combiner ces deux aspects aussi harmonieusement que possible.

C'est pourquoi j'ai parsemé le texte qui suit de commentaires en petits caractères qui sont là pour vous aider à *sentir* les concepts présentés. Ces commentaires n'ont aucune prétention formelle et s'adressent plus à votre imagination qu'à votre raison. J'ai l'espoir qu'ils vous permettront de plus vite vous approprier les notions de ce texte.

2. Sauf bien sûr en ce qui concerne les développements récents de la théorie, comme par exemple les topoi...

Chapitre 2

Catégories

2.1 Graphes

2.1.1 Définition

La notion de catégorie est basée sur celle de graphe. Intuitivement, un graphe est une structure de données permettant de représenter des liens entre des objets. Graphiquement, on représente généralement un graphe sous la forme de "nœuds" et de "flèches" :

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "g"] \arrow[dd, "h"] & D \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & \\
 & C \arrow[uur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

Nous allons adopter une définition abstraite qui se prête bien à l'utilisation en théorie des catégories. Du dessin ci-dessus, nous ne retiendrons que l'ensemble des "nœuds" (ici $\{A, B, C, D\}$), l'ensemble des "flèches" (ici, $\{f, g, h, i, j\}$) et une manière de trouver, étant donnée une flèche, d'où elle part et où elle arrive. On obtient donc la

Définition 3. Un *graphe* G est donné par deux ensembles N et F et deux fonctions

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, shift left, "\text{source}"] \arrow[r, shift right, "\text{but}"'] & N \end{tikzcd}.$$

N — l'ensemble des *nœuds* de G — est parfois noté G_0 ; dans ce cas, l'ensemble F des *flèches* de G est noté G_1.

Notons que notre définition admet les "paires parallèles", c'est-à-dire les configurations de la forme

$$\bullet \rightrightarrows \bullet$$

et les "oreilles", à savoir les flèches qui partent et arrivent au même point :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \end{tikzcd}.$$

Remarquons que l'on note couramment

$$f : A \to B$$

pour signifier que f est une flèche de source A et de but B.

2.1.2 Exemples

On pourrait donner de nombreux exemples de graphes ; d'abord tous ceux que l'on peut facilement dessiner comme les exemples ci-dessus. Ensuite des graphes plus complexes comme par exemple le plan d'un réseau de transport public ; on peut également convenir que les flèches représentent les communications entre les différentes parties d'une organisation ; etc.

Relations Un exemple un peu plus subtil (et plus mathématique) est le suivant : Soit X un ensemble et R une relation sur X, c'est-à-dire une partie de $X \times X$. On peut munir X d'une structure de graphe en convenant qu'il y a une flèche entre a et b si et seulement si aRb (ce qui veut dire $(a,b) \in R$). Pour se fixer les idées, on peut prendre pour X l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ et pour R la relation "être plus petit que". Alors il y aura une flèche (et une seule) de 1 vers tous les autres nombres ; une flèche de 2 vers tous les nombres différents de 1 ; etc.

2.1.3 Homomorphismes de graphes

Comme dans le cas des monoïdes, il est intéressant d'étudier les transformations de graphes qui "respectent la structure" de graphe. Mathématiquement, cela nous donne :

Définition 4. Soient G, H des graphes. Un *homomorphisme de graphes* ϕ de G dans H, noté $\phi : G \to H$ est composé d'une paire de fonctions $\phi_0 : G_0 \to H_0$ et $\phi_1 : G_1 \to H_1$ vérifiant la propriété suivante : Si $u : m \to n$ est une flèche de G, alors $\phi_1(u) : \phi_0(m) \to \phi_0(n)$ dans H.

Un homomorphisme de graphes est donc une transformation de graphes qui "respecte" la source et le but des flèches. Cette exigence peut être formulée dans un langage plus proche de celui des catégories : ϕ est un homomorphisme si et seulement si

$$\mathrm{source}_H \circ \phi_1 = \phi_0 \circ \mathrm{source}_G$$

et

$$\mathrm{but}_H \circ \phi_1 = \phi_0 \circ \mathrm{but}_G\,.$$

Nous verrons au paragraphe 3.5 que ceci peut encore être exprimé en demandant que les deux "diagrammes" suivants "commutent", c'est à dire que dans chacun d'eux les deux chemins possibles donnent le même résultat :

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "\mathrm{source}"'] & H_1 \arrow[d, "\mathrm{source}"] \\ G_0 \arrow[r, "\phi_0"'] & H_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "\mathrm{but}"'] & H_1 \arrow[d, "\mathrm{but}"] \\ G_0 \arrow[r, "\phi_0"'] & H_0 \end{tikzcd}$$

Si vous n'êtes pas familier avec les notions de graphe et d'homomorphisme de graphes, je vous conseille d'étudier quelques exemples avant d'aborder les catégories proprement dites. Il peut être intéressant de formuler vos propres exemples de graphes et de voir ce que signifie un homomorphisme dans ce cas. Si vous désirez des exemples “tout prêts”, vous en trouverez de nombreux dans [BW90].

2.2 Catégories

2.2.1 Définition

Essentiellement, une catégorie est un graphe dans lequel on peut composer les flèches associativement avec un élément neutre. Pour formuler ceci plus clairement, nous aurons besoin d'une notation supplémentaire.

Notation. Pour un graphe G, nous noterons G_2 l'ensemble de ses chemins de longueur 2, ou *paires composables.* Plus précisément, on pose

$$G_2 = \{(g, f) | g, f \in G_1 \wedge \operatorname{but} g = \operatorname{source} f\}.$$

Les éléments de G_2 sont donc des configurations du style

$$\bullet \xrightarrow{g} \bullet \xrightarrow{f} \bullet .$$

Notons que cette notation est assez cohérente avec les G_0 et G_1 introduits précédemment si l'on considère G_i comme l'ensemble des chemins de longueur i dans G.

On peut maintenant formuler la définition de base de ce texte :

Définition 5. Une *catégorie* est un graphe $\mathcal{C}$ muni de deux fonctions supplémentaires

$$\mathrm{id} : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_1 \quad \text{et} \quad \circ : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1,$$

appelées respectivement identité et composition, et vérifiant les axiomes suivants[1] :

C-1: $\operatorname{source}(g \circ f) = \operatorname{source} f$ et $\operatorname{but}(g \circ f) = \operatorname{but} g$.
C-2: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ chaque fois que l'un des côtés est défini.
C-3: $\operatorname{source}(\mathrm{id}_A) = \operatorname{but}(\mathrm{id}_A) = A$ pour tout objet A
C-4: Pour $f : A \to B$ on a $f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f$

On peut illustrer graphiquement chacun de ces points pour le rendre plus clair :

Composition C-1 nous dit qu'une paire composable doit se composer avec les sources et buts comme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \bullet \arrow[r, "g"] & \bullet \end{tikzcd}$$

1. Pour alléger l'écriture, on notera id_A pour $\mathrm{id}(A)$ et $f \circ g$ pour $\circ(f, g)$

Associativité C-2 exige que le résultat d'une composition de plusieurs flèches ne dépende pas de l'ordre dans lequel on a composé. On peut représenter cela en exigeant que les deux "grandes" flèches soient égales dans

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] \arrow[rrr, bend left=60, "h\circ(g\circ f)"] \arrow[rrr, bend right=60, "(h\circ g)\circ f"'] & \bullet \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h\circ g"'] & \bullet \arrow[r, "h"] & \bullet \end{tikzcd}$$

Identité C-3 et C-4 exigent la présence d'une "oreille" en chaque nœud

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \end{tikzcd}$$

qui ne "change rien" quand on la compose avec d'autres flèches.

Notons que pour une catégorie, on parle plutôt d'*objets* que de nœuds ; nous continuerons par contre à parler de flèches, même si une partie de la littérature catégorielle préfère le terme *morphismes* (pour des raisons qui apparaîtront par la suite). Nous sommes ainsi en accord avec la terminologie de [BW90].

Il arrive également que les termes "source" et "but" deviennent respectivement "domaine" et "codomaine". Nous utiliserons l'une ou l'autre des appellations suivant les cas.

Avant de passer aux exemples, nous allons encore définir la notation suivante :

Notation. Il est souvent utile de parler de l'ensemble des flèches de l'objet A à l'objet B dans une catégorie. Nous noterons cet ensemble

$$\mathrm{Hom}(A, B)$$

Le Hom vient du mot "homomorphisme". Nous reviendrons plus tard sur le pourquoi de cette appellation.

2.2.2 Exemples

Je donne ici quelques exemples de catégories courantes ; vous pourrez trouver d'autres exemples dans (presque) tous les textes parlant de catégories... [Mac71] en donne un large échantillon dans le domaine des mathématiques avancées. Vous trouverez aussi des exemples en rapport avec l'informatique dans [BW90].

Catégories élémentaires On a vu que l'on peut donner des exemples de graphes en les dessinant ; on peut bien sûr faire de même avec les catégories. Ainsi les dessins suivant décrivent complètement les catégories qu'ils représentent (nous les nommons pour les réutiliser ultérieurement) :

– La catégorie **1**

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \end{tikzcd}$$

– La catégorie **2**

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \arrow[r] & \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

– La catégorie $\rightrightarrows$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

– La catégorie **3**

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[loop above] \arrow[dr] & \\ \bullet \arrow[loop left] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Il faut cependant faire attention avec cette approche. Ainsi par exemple,

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

ne peut pas représenter une catégorie, car il y manquerait les flèches identité. Notons qu'il arrive tout de même que l'on omette de les représenter quand le contexte indique clairement qu'on a affaire à une catégorie.

De même, le dessin suivant ne peut représenter une catégorie, car il y manquerait la composition des deux flèches non identité :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \arrow[r] & \bullet \arrow[loop above] \arrow[r] & \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd} .$$

Enfin, dans ce dernier contre-exemple, le problème est d'un autre ordre :

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[loop above] \arrow[dr] & \\ \bullet \arrow[loop left] \arrow[ur] \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

En effet, on a implicitement représenté ici *deux* catégories possibles, suivant que la composition des flèches $\nearrow$ et $\searrow$ est l'une ou l'autre des flèches horizontales[2].

Catégories discrètes On appelle *catégorie discrète* une catégorie dont les seules flèches sont les flèches identité. Dans ce cas, la catégorie s'identifie naturellement avec l'ensemble de ses objets. Inversement, tout ensemble peut être vu comme une catégorie discrète si on lui adjoint une flèche (identité) par élément. Donc une catégorie discrète est essentiellement la même chose qu'un ensemble.

2. Il est vrai que ces deux catégories se ressemblent beaucoup du point de vue de leur structure. Cependant, j'insiste sur le fait qu'elles sont distinctes. Après le paragraphe 3.3, nous résumerons ce double aspect (distinctes–semblables) en disant qu'elles sont *isomorphes*.

Pré-ordres Nous avons vu au paragraphe 2.1.2 qu'une relation peut être représentée par un graphe. On peut alors se demander à quelles conditions cette relation peut être représentée par une catégorie.

Rappelons que le graphe représentant la relation R possède une et une seule flèche entre a et b si et seulement si aRb. Voyons donc ce que les axiomes d'une catégorie exigent de R :

C-1 demande de pouvoir composer les flèches ; pour R, cela veut dire que aRb et bRc entraînent aRc. Une telle relation est dite *transitive*.

C-2 n'amène pas de nouvelle exigence ; en effet, comme il y a au maximum une flèche entre deux objets, l'affirmation que deux flèches sont égales est tout à fait inintéressante dans ce cas.

C-3 demande pour tout a que aRa. Une relation vérifiant cette propriété est dite *réflexive*.

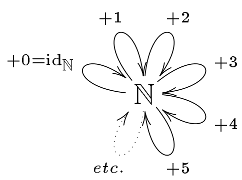
C-4 ne donne rien de nouveau, pour la même raison que C-2.

Une catégorie permet donc de représenter une relation réflexive et transitive. Nous appellerons une telle relation un *pré-ordre*. Si de plus R est *antisymétrique* (ce qui veut dire que aRb et bRa impliquent $a = b$), R est appelé *ordre partiel*. Enfin, R est un *ordre total* si pour tous a, b on a ou bien aRb, ou bien bRa. Par exemple, la relation $\leq$ sur les nombres entiers naturels est un ordre total.

Dans un certain sens, on peut donc considérer que la notion de catégorie est une généralisation de celle d'ensemble (pré-)ordonné.

Monoïdes Considérons un monoïde M. Construisons une catégorie qui comporte un seul objet et dont les flèches (toutes des "oreilles") sont les éléments de M. On peut composer les flèches selon l'opération de M. Alors cette composition est associative et admet un élément neutre. On a donc bien affaire à une catégorie, ce qui nous permet de dire qu'une catégorie est aussi une sorte de monoïde généralisé.

Cette construction peut paraître bizarre. Elle l'est un peu moins si on prend pour l'unique objet de la catégorie M lui-même et si l'on considère que la flèche correspondant à un élément est la loi qui décrit comment cet élément agit sur les autres (et sur lui-même !). Ainsi, dans le cas de $\mathbb{N}$ muni de sa structure additive, le seul objet est $\mathbb{N}$ lui-même et les flèches correspondent aux *opérations* "+1", "+2", etc.



Les éléments du monoïde sont donc vu sous l'angle opératoire. Ce qui nous intéresse est l'action qu'ils ont autour d'eux. Ce point de vue est très caractéristique de la théorie des catégories.

La catégorie des ensembles On peut construire une catégorie dont les objets sont les ensembles et les flèches les fonctions entre ces ensembles[3]. Bien entendu, la composition est

3. En fait, ce n'est pas si simple ; cela pose de délicats problèmes sur l'ensemble de tous les ensembles, etc. nous y reviendrons au paragraphe 2.5

la composition habituelle des fonctions (qui est bien associative) et les flèches identité sont les fonctions identité. Nous appellerons cette catégorie *la catégorie des ensembles* et nous la noterons **SET**.

La catégorie des ordres partiels On peut de même construire une catégorie dont les objets sont les ensembles partiellement ordonnés et les flèches les fonctions monotones (f est dite monotone si $a \leq b$ implique $f(a) \leq f(b)$). Deux remarques s'imposent : premièrement, on a là affaire à une catégorie dont les objets sont eux-mêmes des catégories. Cette situation n'est pas rare. Deuxièmement, le choix des flèches mérite d'être commenté : on aurait tout aussi bien pu prendre — par exemple — toutes les fonctions entre les ensembles ordonnés. Il se trouve que le choix que nous proposons donne naissance à une catégorie plus intéressante (nous verrons pourquoi la page 26).

La catégorie des monoïdes a pour objets les monoïdes et pour flèches les homomorphismes de monoïdes. Les deux remarques ci-dessus s'appliquent aussi ici. Nous noterons cette catégorie **MON**.

Les deux exemples ci-dessus sont typiques de l'utilisation mathématique des catégories. Ils permettent de mieux comprendre pourquoi les flèches sont parfois appelées *morphismes*, c'est-à-dire "transformations préservant la forme"[4].

Suivant votre culture mathématique, vous pouvez sur ce modèle construire de nombreuses variations de catégories dont les objets sont des structures mathématiques et les flèches des fonctions qui préservent cette structure. Ainsi on peut considérer la catégorie des groupes, celle des anneaux, des corps (dont les flèches sont respectivement les homomorphismes de groupes, d'anneaux, de corps) ; la catégorie des espaces vectoriels avec les fonctions linéaires comme flèches ; celle des espaces topologiques avec pour flèches les fonctions continues ; etc.

Notons encore un exemple du même genre :

La catégorie des graphes a pour objets les graphes et pour flèches les homomorphismes de graphes ; nous la noterons **GRF**.

Nous allons encore étudier une dernière classe d'exemples :

Les catégories libres Étant donné un graphe G, on peut construire la *catégorie libre* sur G, $\mathcal{L}(G)$, de la manière suivante : Les objets de $\mathcal{L}(G)$ sont les nœuds de G et ses flèches sont les *chemins* dans G. Les flèches de G nous fournissent les chemins de longueur 1, et la composition de f et g ne sera rien d'autre que le chemin qui passe par f et g. Les flèches identité sont alors les "chemins vides".

> Une bonne manière de se représenter la catégorie libre sur un graphe est de prendre comme graphe un un réseau de transports. Si vous avez un train qui va de Genève à Lausanne et un de Lausanne à Neuchâtel, il est clair que vous pouvez les "composer" en un trajet de Genève à Neuchâtel. De plus, si vous prenez un autre itinéraire entre les mêmes destinations, vous obtiendrez un *autre* trajet, dont le prix, l'intérêt touristique ou simplement la durée pourront être différents.

4. C'est d'ailleurs une variante de cette appellation — *homomorphisme* — qui justifie la notation $\mathrm{Hom}(A, B)$.

Notons que pour éclairer certaines constructions par la suite, il nous arrivera de considérer les flèches d'une catégorie comme représentant les communications ou comportements des objets les uns par rapport aux autres. Ainsi une flèche de A dans B peut être vue comme un comportement de A envers B ou, selon [EV92], comme un aspect de A pour B.

2.3 Quelques définitions catégorielles

Comme nous l'avons vu, les axiomes d'une catégorie ne font intervenir que les flèches et leur composition. Une approche purement catégorielle n'utilisera donc que ces notions-là. On pourrait penser que l'expressivité d'une telle approche est très limitée ; en fait il n'en est rien. Dans ce paragraphe, nous présenterons quelques caractéristiques simples (et pourtant déjà assez puissantes) des flèches et des objets d'une catégorie. Les chapitres suivants — notamment le chapitre 6 — seront consacrés à l'étude de propriétés plus complexes qui peuvent être formulées dans le langage catégoriel.

Définition 6. Un objet T d'une catégorie $\mathcal{C}$ est appelé *objet terminal* si pour tout objet O de $\mathcal{C}$ il existe exactement une flèche $O \longrightarrow T$.

Dans la catégorie d'un ordre partiel, cette notion coïncide avec celle de *maximum*. Dans la catégorie des ensembles **SET**, tout ensemble $\{*\}$ formé d'un seul élément est un objet terminal. En effet, depuis un ensemble quelconque E, il existe une fonction unique vers $\{*\}$, à savoir la fonction constante de valeur $*$.

Si T est un objet terminal, on sait qu'il "reçoit" exactement une flèche de chaque objet. Les flèches qui arrivent à T ne sont donc pas vraiment intéressantes, puisqu'on sait déjà presque tout d'elles. Par contre, celles qui partent de T peuvent présenter un intérêt non négligeable. Ainsi par exemple dans le cas de **SET**, une flèche partant de T est une fonction de $\{*\}$ dans l'ensemble E. Celle-ci est univoquement déterminée par son image, et donc une flèche de T dans E est essentiellement la même chose qu'un élément de E. Donc la notion d'objet terminal permet de généraliser la notion d'élément d'un objet dans une catégorie où cette notion n'est pas forcément définie...

Définition 7. Un objet I d'une catégorie $\mathcal{C}$ est appelé *objet initial* si pour tout objet O de $\mathcal{C}$ il existe exactement une flèche $I \longrightarrow O$.

On a obtenu cette définition en renversant les flèches dans la définition précédente. Cela se dit "la notion d'objet initial est la notion duale de celle d'objet terminal". Nous verrons plus en détail la notion de dualité dans le paragraphe 4.1.

Dans la catégorie d'un ordre partiel, un objet initial est un *minimum*, et dans **SET**, c'est l'ensemble vide. L'unique fonction exigée par la définition est alors la "fonction vide", dont l'image est évidemment... l'ensemble vide !

Peut-être faut-il être tordu comme un mathématicien pour parler de la "fonction vide"... on comprendra mieux cela en se rappelant que, formellement, une fonction $f : A \to B$ est une partie de $A \times B$ vérifiant certains critères. Comme $\emptyset \times X = \emptyset$ admet pour seul sous-ensemble $\emptyset$, il existe une unique fonction $f : \emptyset \to X$.

Définition 8. Une flèche $f : B \to C$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ est appelée *monomorphisme* si pour toute paire de flèches $g, h : A \to B$ de $\mathcal{C}$ telles que $g \neq h$ on a $f \circ g \neq f \circ h$.

Dans la catégorie d'un ordre partiel, toute flèche est un monomorphisme ; en effet, comme il y a au maximum une flèche entre deux objets, la définition n'exige rien du tout... La situation est un peu plus intéressante dans le cas de **SET** :

Proposition 1. *Dans* **SET***, les monomorphismes sont exactement les fonctions injectives*[5].

Preuve. Supposons que $f : B \to C$ soit un monomorphisme. Soit T un ensemble à un seul élément. Alors une fonction $g : T \to B$ est essentiellement la même chose qu'un élément de B. Donc la définition de monomorphisme nous dit dans ce cas que deux éléments différents doivent avoir des images différentes, ce qui est la définition d'une fonction injective.

Inversement, supposons que $f : B \to C$ est injective. Soit A un ensemble quelconque et soient $g, h : A \to B$ deux fonctions distinctes. Alors il existe $a \in A$ avec $g(a) \neq h(a)$. Comme f est injective, $f \circ g(a) \neq f \circ h(a)$. Donc $f \circ g \neq f \circ h$, ce qui veut dire que f est un monomorphisme. □

La notion de monomorphisme est donc une généralisation de celle d'injectivité.

On peut considérer la notion duale, qui généralise la surjectivité :

Définition 9. Une flèche $f : A \to B$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ est appelée *épimorphisme* si pour toute paire de flèches $g, h : B \to C$ de $\mathcal{C}$ telles que $g \neq h$ on a $g \circ f \neq h \circ f$.

Dans la catégorie d'un ordre partiel, toute flèche est un épimorphisme. Dans **SET**, la situation est à nouveau plus intéressante :

Proposition 2. *Dans* **SET***, les épimorphismes sont exactement les fonctions surjectives*[6].

La preuve représente un excellent exercice...

Définition 10. Une flèche $f : B \to C$ de $\mathcal{C}$ est appelée *isomorphisme* s'il existe $g : C \to B$ avec $f \circ g = \mathrm{id}_C$ et $g \circ f = \mathrm{id}_B$. B et C sont alors dits *isomorphes*.

Cette définition est d'une grande importance en théorie des catégories. Elle nous dit quand deux objets sont indiscernables du point de vue de la catégorie considérée.

Par exemple dans **SET**, il est bien connu que les isomorphismes — c'est à dire les fonctions inversibles — sont les fonctions bijectives. Ainsi, deux ensembles de même cardinalité sont isomorphes, c'est à dire qu'ils jouent exactement le même rôle du point de vue de la catégorie des ensembles.

Notons que dans la catégorie d'un ordre partiel, les seuls isomorphismes sont les flèches identité.

> Il est bien connu qu'une fonction injective et surjective est bijective. Ce résultat *ne se généralise pas* aux catégories : il n'est pas vrai qu'un monomorphisme qui est aussi un épimorphisme est un isomorphisme. L'exemple des ordres partiels est là pour nous le démontrer : chaque flèche est à la fois un mono- et un épimorphisme, et pourtant très peu sont des isomorphismes.

5. Une fonction injective est une fonction $f : B \to C$ telle que $b \neq b'$ implique $f(b) \neq f(b')$ pour tous b, b' dans B

6. Une fonction $f : A \to B$ est surjective si $f(A) = B$

> En décrivant la catégorie **ORD** des ordres partiels, nous avons dit que le choix des fonctions monotones comme flèches était le plus fructueux. Ce choix a notamment comme conséquence que pour que deux objets soient isomorphes, il faut non seulement qu'ils aient la même cardinalité, mais en plus que la manière de les ordonner soit semblable. Le choix des flèches d'une catégorie contribue donc à préciser quelle est la part de structure des objets qui nous intéresse.

Nous avons défini la notion d'objet terminal ; on peut se demander si un objet terminal est forcément unique. La réponse est non. Dans **SET**, par exemple, $\{a\}$ et $\{b\}$ sont tous deux des objets terminaux. Cependant, un objet terminal est essentiellement unique dans le sens suivant :

Proposition 3. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Si a et b sont des objets terminaux de $\mathcal{C}$, alors a et b sont isomorphes.*

On exprime cette proposition en disant "un objet terminal est unique à isomorphisme près".

Preuve. Soient a, b des objets terminaux de $\mathcal{C}$. Alors il existe un unique $f : a \to b$ et un unique $g : b \to a$. Donc $g \circ f : a \to a$. Mais il existe un unique $h : a \to a$. Or on a $\mathrm{id}_a : a \to a$. On en déduit $g \circ f = \mathrm{id}_a$. On montre de même que $f \circ g = \mathrm{id}_b$ et on en déduit donc que f et g sont des isomorphismes. □

Cette preuve est très typique des preuves catégorielles. Il est important de bien saisir son déroulement. Pour vous en assurer, vous pouvez essayer de démontrer la proposition (duale) suivante :

Proposition 4. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Si a et b sont des objets initiaux de $\mathcal{C}$, alors a et b sont isomorphes.*

> En théorie des catégories, on verra que les définitions se font toutes "à isomorphisme près", ce qui n'est pas surprenant puisque deux objets isomorphes sont indiscernables. On peut caricaturer cette attitude en proposant l'axiome de base de la théologie catégorielle : "Dieu est unique à isomorphisme près".

Les catégoriciens aiment bien pouvoir représenter graphiquement ce dont ils parlent sous forme de petits dessins dont vous avez déjà vu des exemples dans ce texte. Nous allons donc utiliser les notations suivantes :

Notation. Nous représenterons un monomorphisme par une flèche du type

$$\hookrightarrow$$

et un épimorphisme par une flèche du type

$$\twoheadrightarrow$$

2.4 La notion de sous-objet

En mathématiques, il est souvent utile lorsqu'on a défini une structure de définir ce qu'est une sous-structure de cette structure. Ainsi par exemple, un sous-monoïde du monoïde M est un sous-ensemble de M qui est encore un monoïde (pour la même opération). Un sous-ordre partiel est un sous-ensemble d'un ordre partiel qui est encore un ordre partiel.

> De manière générale, un sous-machin est un sous-ensemble d'un machin qui est encore un machin pour la même structure...

Un sous-graphe du graphe G est formé d'un sous-ensemble de G_0 et d'un sous-ensemble de G_1 où les fonctions source et but sont des restrictions de celles de G. Une sous-catégorie est un sous-graphe qui est encore une catégorie (c'est à dire que l'on peut encore composer les flèches et que toutes les flèches unité sont là...)

Étant donné la ressemblance de ces définitions [7], il devrait être possible de généraliser la notion de sous-objet d'une catégorie. Au premier abord cependant, ceci peut paraître difficile pour au moins deux raisons : premièrement, la notion de sous-ensemble utilisée dans toutes les définitions ci-dessus n'est pas disponible en théorie des catégories (elle fait même partie de ce que nous voudrions définir). Deuxièmement, nous avons déjà noté que nous ne pouvons définir les choses qu'à isomorphisme près. Or si nous sommes habitué à considérer que $\{a, b, c\}$ est un sous-ensemble de $\{a, b, c, d\}$, nous avons de la peine à voir en quoi $\{1, 2, 3\}$ le serait aussi...Et pourtant, ces ensembles sont isomorphes !

La définition que nous allons donner sera donc un peu différente de ce que l'on pourrait attendre. Cependant, elle induira dans **SET** une notion parfaitement équivalente à la notion habituelle de sous-ensemble. Nous donnerons les grandes lignes ; pour les détails reportez-vous à [BW90].

Nous aurons besoin d'une idée préparatoire :

Définition 11. Soit $f : A \to B$ une flèche dans une catégorie. Si pour un certain $g : C \to B$ il existe un $h : A \to C$ tel que $f = g \circ h$, on dit que f *factorise par* g et par h. On dit alors que g et h sont des *facteurs* de f. On peut représenter la situation graphiquement : f factorise par g s'il existe un h tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Cette notion nous permet de définir une relation sur les monomorphismes de la catégorie $\mathcal{C}$: Pour $f : A \hookrightarrow C$ et $g : B \hookrightarrow C$, on a $f \sim g$ si et seulement si chacun factorise par l'autre :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, hook, "f"] \arrow[d, shift right, "j"'] & \\ B \arrow[ur, hook, "g"'] \arrow[u, shift right, "k"'] & C \end{tikzcd}$$

Il est facile de montrer que dans ce cas les facteurs j et k sont uniques et inverses l'un de l'autre, et donc que A et B sont isomorphes. De plus, $\sim$ est une relation d'équivalence (c'est

7. Il est vrai que je les ai formulées ici de manière pas toujours standard pour faire ressortir leurs similitudes...

à dire une relation réflexive, symétrique et transitive). Ceci nous permet de poser la définition suivante :

Définition 12. Un sous-objet de C est une classe d'équivalence de monomorphismes sous la relation $\sim$.

On peut montrer que dans **SET**, cette notion correspond bien à la notion habituelle de sous-ensemble ; en effet, chaque sous-objet de l'ensemble E contient une et une seule injection d'un sous-ensemble de E dans E. Ainsi les sous-objets de E sont en bijection avec ses sous-ensembles.

Nous reviendrons à cette notion de sous-objet au chapitre 10, car c'est un ingrédient indispensable dans la définition d'un topos.

2.5 Remarques

2.5.1 Autres définitions

Nous avons adopté ici une définition assez courante des catégories. Cependant il existe d'autres approches qui peuvent se révéler utiles dans certains cas.

Flèches-seulement Dans une catégorie, chaque objet possède une et une seule flèche identité. On a donc une certaine redondance, dont on peut se débarrasser en ne définissant une catégorie *que par ses flèches*. Une catégorie est donc une collection de flèches dont certaines se composent en vérifiant certains axiomes... Cette approche est conceptuellement un peu plus difficile que celle que nous avons choisie. Elle permet cependant dans certains cas des définitions plus "naturelles".

Dans cette logique, il arrive que l'on note A pour la flèche identité id_A. Nous le ferons parfois dans ce texte, lorsque cela permet une notation plus cohérente.

> Si on s'intéresse aux catégories pour faire de la modélisation en psychologie, on pourra relever que dans cette approche, l'objet n'est construit qu'*a posteriori* à partir des transformations identiques... ce qui correspond assez bien aux idées psychogénétiques de Piaget.

Approche axiomatique Comme nous l'avons relevé, la définition de **SET** et de catégories apparentées pose de délicats problèmes du type "l'ensemble de tous les ensembles est-il vraiment un ensemble?" On verra dans le paragraphe suivant une manière de s'en sortir avec notre approche. On peut cependant aussi imaginer *court-circuiter* la théorie des ensembles et approcher les catégories de manière axiomatique, comme construction directe sur la logique mathématique. Certains sont même allés plus loin en voulant faire de la théorie des catégories une alternative (préférable) à celle des ensembles pour les fondements des mathématiques (cf. [Law66]).

Ces approches de la théorie des catégories sont les plus courantes ; il en existe cependant quelques autres que nous n'aborderons pas ici.

2.5.2 Fondations

Nous venons de le dire, la construction de certaines "grandes" catégories comme **SET** pose des problèmes. Une solution est donc de contourner la théorie des ensembles.

Une autre solution — plus courante — est d'enrichir un petit peu la théorie des ensembles en supposant l'existence d'un "univers" assez grand pour contenir tous les objets avec lesquels on veut travailler, mais assez petit pour éviter les paradoxes. Ce point de vue est exposé, par exemple, dans [Mac71].

Quant à nous, nous allons totalement faire abstraction de ce problème. En effet, d'une part ces questions fondamentales deviennent vite d'une extrême complexité ; et d'autre part, je ne crois pas qu'il faille saisir à fond ces questions pour comprendre la ligne générale de la théorie.

Soyez donc conscients que lorsqu'on parle de **SET**, **MON**, **GRF**, etc., on élude un problème de taille. Mais ceci ne nous empêchera pas d'utiliser ces catégories qui permettent tout de même de bonnes illustrations des concepts présentés dans ce livre.

Chapitre 3

Foncteurs

Comme je l'ai déjà relevé, le premier réflexe du mathématicien qui définit une structure est d'étudier les transformations qui préservent cette structure. Pour les catégories, ces transformations sont les foncteurs. Les foncteurs sont donc aux catégories ce que les homomorphismes de graphes sont aux graphes ou les applications linéaires aux espaces vectoriels.

Mais les foncteurs sont aussi un petit peu plus que cela ; en effet, cette notion nous permettra de parler de catégories dont les objets sont des catégories — alors que les applications linéaires ne permettent pas de parler de l'espace vectoriel des espaces vectoriels.

3.1 Foncteurs

3.1.1 Définition

Définition 13. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux catégories. Un *foncteur* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est composé d'une paire de fonctions $F_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{B}_i, \quad i = 0, 1$ vérifiant les axiomes suivants :

F-1: Pour $f : A \to B$ on a $F_1(f) : F_0(A) \to F_0(B)$
F-2: Pour tout objet A de $\mathcal{A}$, on a $F_1(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F_0(A)}$
F-3: Si $g \circ f$ est défini dans $\mathcal{A}$, alors $F_1(g \circ f) = F_1(g) \circ F_1(f)$

Nous avons défini une catégorie comme étant un graphe dans lequel on peut composer les flèches avec une identité pour chaque objet. La définition de foncteur est donc très naturelle : c'est un homomorphisme de graphes (F-1) qui respecte les identités (F-2) et la composition (F-3).

3.1.2 Exemples

Dans tous les exemples de ce paragraphe, j'omets un certain nombre de vérifications ; en effet, la seule manière formelle d'affirmer que quelque chose est un foncteur est de vérifier systématiquement que les conditions F-1 à F-3 sont remplies. Cependant, sur les exemples simples qui suivent, ces vérifications sont généralement très simples. N'hésitez surtout pas, en cas de doute, à vous munir d'un papier et d'un crayon et d'écrire ces quelques points noir sur blanc. Rien de tel pour s'assurer que l'on a vraiment bien compris la notion.

Commençons par étudier ce qu'est un foncteur dans le cas des exemples simples de catégories que nous avons donné au paragraphe 2.2.2.

Catégories élémentaires Ces catégories simples[1] donnent lieu à des foncteurs que l'on peut décrire simplement. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie,

- Un foncteur de la catégorie **1** dans $\mathcal{C}$ correspond simplement au choix d'un objet de $\mathcal{C}$. En effet, on peut choisir librement l'image du seul objet de **1** parmi les objets de $\mathcal{C}$; mais une fois ce choix effectué, F-2 nous force l'image de la seule flèche de **1**. Notons que F-1 et F-3 n'exigent rien de plus dans ce cas simple.

- Un foncteur de la catégorie **2** dans $\mathcal{C}$ correspond au choix d'une flèche de $\mathcal{C}$. En effet, une fois choisie l'image de la seule flèche non identité de **2**, les autres choix sont forcés par F-1 (pour la source et le but de cette flèche) et F-2 (pour les deux flèches identités).

- Un foncteur de **3** dans $\mathcal{C}$ correspond au choix d'une paire composable de $\mathcal{C}$, pour des raisons analogues au cas précédent.

- Un foncteur de la catégorie $\rightrightarrows$ dans $\mathcal{C}$ n'est rien d'autre que le choix d'une *paire parallèle* de $\mathcal{C}$.

Catégories discrètes Dans le même ordre d'idée, on voit facilement qu'un foncteur entre deux catégories discrètes n'est rien d'autre qu'une fonction entre leur deux ensembles d'objets (seul F-2 intervient).

Pré-ordres Ce cas est plus intéressant. En effet, un foncteur entre deux pré-ordres vus comme des catégories est une fonction F entre leurs ensembles d'objets telle que si aRb alors $F(a)RF(b)$ (par F-1). Donc un foncteur entre deux pré-ordres est une fonction monotone. Notons que F-2 et F-3 sont trivialement vérifiés , puisqu'il y a au plus une flèche entre deux objets.

Monoïdes De même, un foncteur entre deux monoïdes (vus comme catégories) est une fonction entre leurs ensembles de flèches[2] qui respecte l'opération (par F-3) et l'élément neutre (par F-2). C'est donc un homomorphisme de monoïdes.

> Ces deux derniers exemples sont particulièrement intéressants. En effet, ils montrent que si une structure est vue comme une catégorie, un foncteur entre de telles structures correspond à la notion habituelle d'homomorphisme de cette structure. Cela devrait contribuer à nous convaincre que nous avons la "bonne" notion de foncteur.

Foncteurs oublieux Certains foncteurs ont pour effet d'"oublier" une partie de la structure des objets sur lesquels ils portent. Ce sont les *foncteurs oublieux* ou *foncteurs sous-jacents*. Prenons quelques exemples

Le foncteur Obj : **GRF** $\rightarrow$ **SET** qui envoie chaque graphe sur l'ensemble de ses objets (on "oublie" les flèches) et chaque homomorphisme de graphes sur la fonction correspondante

1. cf. page 20 pour leur définition
2. Les objets ne sont pas très intéressants, puisqu'il n'y en a qu'un par monoïde...

sur les objets est un foncteur oublieux. De même pour le foncteur Fl : **GRF** $\to$ **SET** qui envoie chaque graphe sur l'ensemble de ses flèches et chaque homomorphisme sur la fonction correspondante sur les flèches.

Le foncteur **MON** $\to$ **SET** qui envoie chaque monoïde sur l'ensemble de ses éléments et chaque homomorphisme sur la même transformation, mais vue comme fonction entre ensembles, est un foncteur oublieux ; en effet, cette transformation "oublie" l'opération des monoïdes pour ne garder que leurs éléments. De même pour le foncteur **ORD** $\to$ **SET** qui envoie chaque ordre partiel sur l'ensemble de ses éléments et chaque fonction monotone sur la fonction correspondante.

> On a un peu l'impression que ces foncteurs ne "font rien". Dans le cas des ordres partiels, par exemple, la différence entre la fonction monotone de départ et la fonction tout court à l'arrivée n'est pas évidente. Pourtant, du point de vue catégoriel, ces foncteurs sont très importants. C'est eux en effet qui nous permettent de parler de l'ensemble des objets d'un graphe ; de l'ensemble des éléments d'un monoïde ; etc.
>
> Les foncteurs oublieux permettent de faire formellement des changements de catégories que nous faisons (trop) facilement quand nous parlons des objets considérés. Conceptuellement, ils permettent ainsi de mieux distinguer les rapports et les différences entre ces catégories.

Les foncteurs libres À l'"inverse" des foncteurs oublieux[3], les foncteurs libres permettent d'ajouter une structure aux objets de la catégorie de départ. Ainsi par exemple le foncteur **SET** $\to$ **MON** qui envoie chaque ensemble E sur le monoïde libre sur E et chaque fonction sur l'homomorphisme de monoïdes correspondant est un foncteur libre.

> Les foncteurs oublieux sont très simples — au point qu'on a parfois l'impression qu'il ne font rien. Les foncteurs libres sont assez complexes, et leur définition peut être difficile à donner succinctement. Nous verrons au chapitre 8 sur l'adjonction qu'une caractérisation simple d'un foncteur libre est de dire qu'il est "adjoint à gauche" d'un foncteur oublieux. C'est ce genre de chose qui rend la notion d'adjonction particulièrement intéressante.

Nous allons étudier un dernier exemple de foncteur, qui représente un outil technique important de la théorie des catégories.

Les Hom-**foncteurs** Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et C un objet de $\mathcal{C}$. Nous allons définir un foncteur $\mathrm{Hom}(C,-) : \mathcal{C} \to \mathbf{SET}$ de la manière suivante :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{HF-1: } \mathrm{Hom}(C,-)(A) = \mathrm{Hom}(C,A) \text{ pour tout objet } A \text{ de } \mathcal{C} \\ \text{HF-2: } \mathrm{Hom}(C,-)(f) = \mathrm{Hom}(C,f) : \mathrm{Hom}(C,A) \to \mathrm{Hom}(C,B) \text{ pour } f : A \to B. \end{array}}$$

Nous devons encore définir la fonction $\mathrm{Hom}(C,f)$ pour un $f : A \to B$ donné. Pour bien comprendre ce que l'on fait, commençons par quelques remarques :

– Nous avons à faire à un foncteur à valeur dans **SET**. Pour chaque objet A, il nous donne l'*ensemble* des flèches de C dans A.

3. En fait, ce n'est pas l'inverse, c'est l'adjoint (cf chapitre 8)

– Par conséquent, $\mathrm{Hom}(C, f)$ doit être une fonction de l'ensemble $\mathrm{Hom}(C, A)$ dans l'ensemble $\mathrm{Hom}(C, B)$.

– Nous avons à disposition une flèche $f : A \to B$ qui nous permet par composition de transformer une flèche arrivant en A en une flèche arrivant en B.

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, bend right, "\mathrm{Hom}(C,A)"'] \arrow[dl] \arrow[dl, shift left] \arrow[dr, bend left, "\mathrm{Hom}(C,B)"] \arrow[dr] \arrow[dr, shift right] & \\
A \arrow[rr, "f"'] & & B
\end{tikzcd}$$

Nous allons donc définir $\mathrm{Hom}(C, f)$ comme étant la *fonction de composition avec* f, c'est à dire que pour $g \in \mathrm{Hom}(C, A)$ on pose

$$\mathrm{Hom}(C, f)(g) = f \circ g.$$

On peut vérifier facilement que l'on a bien ainsi défini un foncteur. Nous verrons par la suite (au chapitre 7) que ces foncteurs sont utiles pour représenter de manière interne — ou *internaliser* — certaines constructions externes à la catégorie. Notons encore qu'il y a exactement un Hom-foncteur par objet de la catégorie $\mathcal{C}$. Nous avons donc défini là une famille de foncteurs $\mathcal{C} \to \mathbf{SET}$ pour chaque catégorie $\mathcal{C}$.

3.2 Les catégories de catégories

Comme nous l'avons déjà vu dans des exemples, certaines catégories peuvent avoir pour objets des catégories (par exemple **MON**, **ORD**). Le but de ce paragraphe est d'étudier de plus près cette situation.

Nous avons vu que les catégories de structures (comme **ORD**, **MON**, **GRF**, etc.) ont pour flèches les transformations qui préservent cette structure — non que ce soit la seule solution, mais c'est la plus fructueuse. Nous pouvons donc supposer qu'il faudrait faire la même chose avec les catégories (qui sont, ne l'oublions pas, aussi des structures). Mais avant de pouvoir parler de foncteurs comme flèches d'une catégorie, nous devons vérifier deux choses :

– La transformation identique qui envoie chaque objet d'une catégorie sur lui-même et chaque flèche sur elle-même est un foncteur. Ceci est évident, car dans ce cas F-1 à F-3 se résument à des trivialités.

– La composition de deux foncteurs est encore un foncteur. Ceci se voit "à l'oeil nu" dans F-1 à F-3.

Ainsi, on peut parler de catégories dont les objets sont des catégories et les flèches des foncteurs. On peut même, moyennant quelques précautions (cf. paragraphe 2.5.2), définir la catégorie **CAT** dont les objets sont toutes les catégories et les flèches tous les foncteurs.

Notons que ceci nous permet de donner des nouveaux exemples de foncteurs oublieux : les deux foncteurs $\mathbf{CAT} \to \mathbf{SET}$ qui envoient chaque catégorie sur l'ensemble de ses objets, respectivement de ses flèches ; et le foncteur $\mathbf{CAT} \to \mathbf{GRF}$ qui envoie chaque catégorie sur son graphe sous-jacent (les actions respectives de ces trois foncteurs sur les flèches de **CAT** sont évidentes).

On peut aussi donner un nouvel exemple de foncteur libre : le foncteur **GRF** $\to$ **CAT** qui envoie chaque graphe sur la catégorie libre sur ce graphe. L'action sur les flèches de **GRF** est alors entièrement déterminée par F-3 ; en effet, étant donné un homomorphisme de graphes $F : G \to H$, on construira le foncteur entre les catégories libres correspondantes $\mathcal{L}(F) : \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(H)$ de la manière suivante : les flèches de $\mathcal{L}(G)$ qui sont déjà dans G ont la même image par $\mathcal{L}(F)$ que par F. Les autres sont forcément des compositions des premières et donc leur image par $\mathcal{L}(F)$ est déterminée par F-3.

3.3 Les types de foncteurs

Les foncteurs étant des flèches de la catégorie **CAT**, nous connaissons déjà quelques manières de les caractériser : ce peuvent être des monomorphismes, des épimorphismes ou des isomorphismes (cf paragraphe 2.3).

Notons qu'un foncteur est un isomorphisme si et seulement si il est bijectif à la fois sur les objets et les flèches et qu'il est un monomorphisme si et seulement si il est une injection à la fois sur les objets et les flèches. Par contre, un épimorphisme entre deux catégories n'est pas forcément surjectif (pour un contre-exemple, cf [BW90], 2.9.3).

Il existe cependant quelques propriétés des foncteurs qui sont plus intrinsèques à **CAT** que celles que nous venons de citer. Pour les énoncer, nous avons besoin de considérer l'effet d'un foncteur sur les “Hom-sets” :

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. Alors pour toute paire d'objets A, B de $\mathcal{C}$, F induit une fonction

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

qui envoie $f : A \to B$ sur $F(f) : F(A) \to F(B)$.

Définition 14. Si pour toute paire A, B d'objets de $\mathcal{C}$ cette fonction est injective, alors F est un foncteur *fidèle*.

Définition 15. Si cette fonction est surjective pour toute paire A, B d'objets de $\mathcal{C}$, le foncteur F est dit *plein*.

> Nous utiliserons assez peu ces notions dans ce texte. Cependant, je tenais à les présenter, car elles sont assez courantes dans la littérature catégorielle. Je vous conseille là aussi de chercher quelques exemples de foncteurs pleins ou fidèles, pour voir ce que cela signifie concrètement.

3.4 Les foncteurs comme spécification de structure

Au paragraphe 2.1.1, nous avons défini un graphe comme étant donné par deux ensembles et une paire de fonctions entre eux dans la configuration

$$F \underset{\text{but}}{\overset{\text{source}}{\rightrightarrows}} N\,.$$

Avec les connaissances que nous avons maintenant, nous pourrions reformuler cette définition en disant qu'un graphe est un foncteur de la catégorie $\rightrightarrows$ dans **SET**. Ceci est un exemple de l'utilisation d'un foncteur pour spécifier une structure — en l'occurrence celle de graphe.

Ce point de vue est utile pour deux raisons. Premièrement, ce peut être un outil de spécification pratique et concis (il faut reconnaître que la définition d'un graphe en terme de foncteur est très ramassée !). Deuxièmement, cet aspect des foncteurs nous sera d'une grande aide au chapitre 5 pour comprendre le concept de *transformation naturelle.*

Dans ce but, nous allons prendre un exemple encore plus simple (pour ne pas dire simpliste), mais qui nous permettra quelques variations instructives. Soit $\mathcal{A}$ la catégorie

$$\begin{tikzcd} R \arrow[loop left] \arrow[r, "a"] & P \arrow[loop right] \end{tikzcd} .$$

Notons que cette catégorie est isomorphe à **2**. On peut considérer que cette catégorie représente la notion d'attribution de rôles. Ainsi un foncteur $\mathcal{A} \to \mathbf{SET}$ peut envoyer R sur un ensemble de rôles, P sur un ensemble de personnes et a sur une attribution, c'est à dire une fonction qui attribue à chaque rôle une personne. La figure 3.1 illustre cette situation ; l'effet de la fonction $F(a)$ est représenté en pointillés.

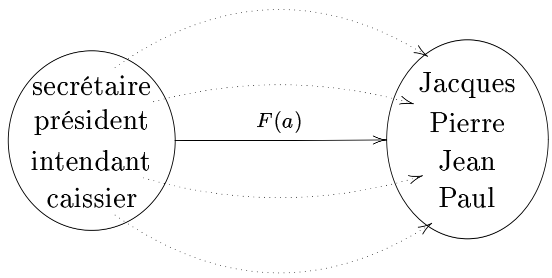


FIG. 3.1: *L'image d'un foncteur* $F : \mathcal{A} \to \mathbf{SET}$

Cette situation peut ne pas correspondre à ce que nous voulions décrire. En effet, elle permet par exemple que tous les rôles soient remplis par une seule personne et que les autres n'aient rien à faire. Par contre, si l'on remplace dans la situation ci-dessus **SET** par la catégorie dont les objets sont les ensembles et les flèches les fonctions *injectives*, on évite le cumul des tâches. De même, en se limitant aux fonctions *surjectives*, on évite les tire-au-flanc.

La structure que l'on spécifie par un foncteur dépend donc non seulement de la catégorie de départ, mais aussi de celle d'arrivée. Prenons un dernier exemple.

Supposons que l'idée d'un président haut comme trois pommes flanqué d'un secrétaire de 2 mètres vous soit insupportable. Pour résoudre ce difficile cas de conscience, nous allons remplacer **SET** par **ORD**, en ordonnant les personnes selon leur taille et les rôles selon la hiérarchie. Alors un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathbf{ORD}$ respectera les exigences éthiques que nous venons de poser. En effet, l'image de a par F sera une fonction monotone — et c'est exactement ce que nous désirions. Cette situation est représentée dans la figure 3.2.

Nous réutiliserons cet exemple pour illustrer la notion de transformation naturelle.

3.5 Diagrammes

Nous avons déjà à plusieurs reprises dans ce texte rencontré des "dessins" qui permettaient d'exprimer des contraintes entre les éléments (objets et flèches) d'une catégorie[4]. Dans ce

4. cf. par exemple 2.1.3

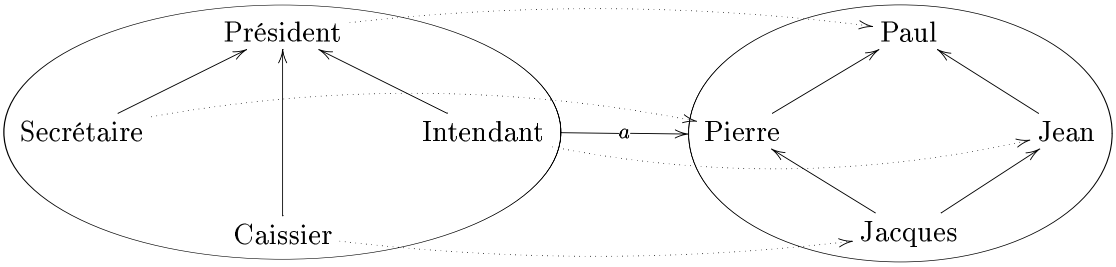


FIG. 3.2: *L'image d'un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathbf{ORD}$*

paragraphe, nous allons formaliser plus précisément cette idée, pour pouvoir ensuite en faire un usage systématique.

Définition 16. Soient $\mathcal{I}, \mathcal{C}$ des catégories. Un *diagramme* D dans $\mathcal{C}$ de forme $\mathcal{I}$ est un foncteur $D : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$.

> Nous avons donc donné un nouveau nom à un objet existant déjà. La différence entre un foncteur et un diagramme est uniquement conceptuelle. On parlera plutôt de l'un ou de l'autre suivant quel aspect on désire mettre en avant.

La notion de diagramme permet de spécifier une structure dans une catégorie — en cela, nous sommes proches du sujet du paragraphe précédent — sans les exigences d'une sous-catégorie[5]. En effet,

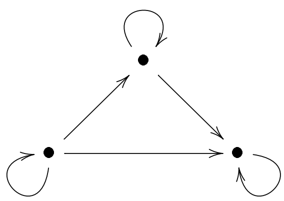
$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

peut être l'image d'un diagramme, alors que ce n'est pas une sous-catégorie.

Il est courant — et nous le ferons abondamment — de ne représenter que l'image d'un foncteur lorsqu'on le considère comme diagramme[6]. Il faut cependant être prudent : le diagramme

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "g"] & \\ B \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

peut être de forme **3**



5. cf. paragraphe 4.2
6. De plus, on omet généralement les flèches identités

et dans ce cas-là, on a forcément $g \circ f = h$. Mais il peut aussi être de forme

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[loop left] \arrow[rr] & & \bullet \arrow[loop right] \\
\bullet \arrow[loop left] \arrow[rr] & & \bullet \arrow[loop right] \\
\bullet \arrow[loop left] \arrow[rr] & & \bullet \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

et dans ce cas-là il n'y a pas d'exigence sur f, g, h.

> Vous trouverez dans [BW90] quelques exemples des diagrammes et une discussion détaillée sur les subtilités de la notion. Relevons simplement que dans un diagramme peuvent apparaître plusieurs fois le même objet ou la même flèche, comme par exemple dans
>
> $$A \overset{f}{\underset{f}{\rightrightarrows}} A .$$

Définition 17. Nous dirons qu'un diagramme D *commute* si tous les chemins possibles d'un point à un autre sont égaux dans D.

Nous ne donnerons pas de définition plus précise ici. Pour une illustration, reportez-vous au paragraphe 2.1.3, où nous avons déjà donné des diagrammes commutatifs et leur traduction en terme d'équations.

> A nouveau, je vous renvoie à [BW90] pour des précisions concernant ce concept. Notons que comme en tout point d'un diagramme une flèche identité est sous-entendue, toute “oreille” d'un diagramme commutatif doit être la flèche identité de l'objet considéré.

Les diagrammes commutatifs sont donc un moyen d'exprimer graphiquement les équations dans une catégorie. Ceci est appréciable, car certaines contraintes qui impliqueraient un grand nombre d'équations se résument en un diagramme tout à fait “lisible”.

Notons que dans certains textes, et notamment [BW90], une diagramme est un homomorphisme de graphe et non un foncteur. Ceci n'est pas très grave puisque

- chaque foncteur est un homomorphisme de graphe sur les graphes sous-jacents, et
- chaque homomorphisme de graphe s'étend de manière unique en un foncteur sur les catégories libres correspondantes.

Ces notions sont donc équivalentes[7].

3.6 Préservation, réflexion, création

Nous avons présenté au paragraphe 3.3 quelques propriétés simples qui peuvent caractériser un foncteur. Nous en présentons ici trois de plus, qui concernent le comportement d'un foncteur par rapport aux propriétés des diagrammes. Nous connaissons pour l'instant peu de telles

7. Mais ceci explique l'habitude d'omettre des flèches identité dans un diagramme : si on considère des graphes, elles ne sont plus indispensables !

propriétés (essentiellement la commutativité), mais notre vocabulaire va s'enrichir au cours de pages d'expressions comme "C est un cône de sommet S" ou "L est la limite de D". Notons cependant que la commutativité d'un diagramme permet déjà quelques affirmations intéressantes ; par exemple, si le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd},$$

cela implique que f est un isomorphisme d'inverse g.

Définition 18. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *préserve* une propriété P si pour chaque diagramme D dans $\mathcal{C}$ ayant la propriété P, l'image $F(D)$ de D a également la propriété P.

On peut ainsi énoncer le résultat suivant :

Proposition 5. *Tout foncteur préserve les isomorphismes.*

Preuve. Soit f un isomorphisme d'inverse g dans $\mathcal{C}$. Alors on a

$$F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$$

et

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$$

et donc $F(f)$ est un isomorphisme d'inverse $F(g)$. $\square$

Définition 19. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *reflète* une propriété P si pour chaque diagramme $F(D)$ dans $\mathcal{D}$ ayant la propriété P, le diagramme D dans $\mathcal{C}$ a également la propriété P.

Définition 20. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *crée* une propriété P si, étant donné un diagramme D dans $\mathcal{D}$ vérifiant P, il existe un unique diagramme C dans $\mathcal{C}$ vérifiant P et tel que $F(C) = D$.

On peut par exemple montrer le résultat suivant (je vous laisse la preuve en exercice) :

Proposition 6. *Un foncteur plein et fidèle crée les isomorphismes.*

Chapitre 4

Constructions sur les catégories

Dans ce chapitre, nous allons étudier comment construire de nouvelles catégories sur la base de celles que nous connaissons. Ceci nous permettra, notamment, de considérablement augmenter l'expressivité de la notion de foncteur.

4.1 Catégorie duale

J'ai déjà cité plusieurs fois informellement la notion de dualité. Nous avons par exemple dit que la notion d'objet initial était duale à la notion d'objet terminal. "C'est la notion obtenue en renversant les flèches dans la définition", ai-je dit alors. Mais qu'est-ce que cela signifie, exactement ?

Définition 21. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Nous appellerons *catégorie duale* de $\mathcal{C}$ la catégorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ définie par les axiomes suivants :

D-1: Les objets et les flèches de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ sont les objets et les flèches de $\mathcal{C}$.
D-2: Si $f : A \to B$ dans $\mathcal{C}$, alors $f : B \to A$ dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.
D-3: Si $h = g \circ f$ dans $\mathcal{C}$, alors $h = f \circ g$ dans $\mathcal{C}$.

Par exemple, un objet initial d'une catégorie $\mathcal{C}$ est un objet terminal de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Une des forces de cette notion réside dans le fait que si une proposition portant sur une catégorie est vraie, alors la proposition duale — c'est à dire la même proposition portant sur la catégorie duale — est également vraie. Ainsi par exemple, si l'on montre qu'un objet terminal est unique à isomorphisme près, on obtient gratuitement en prime l'unicité à isomorphisme près d'un objet initial. On trouvera un exposé détaillé de ce point de vue dans [Mac71].

Quand nous avons défini un foncteur, nous avons exigé qu'une flèche $f : A \to B$ soit envoyée sur une flèche $F(f) : F(A) \to F(B)$. Pourtant, dans de nombreux cas intéressants, $f : A \to B$ est envoyée sur $F(f) : F(B) \to F(A)$. On peut maintenant prendre en compte cette situation :

Définition 22. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ des catégories. Un foncteur $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ est appelé *foncteur contravariant* de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$.

Par contraste, on qualifie parfois un foncteur $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ de *covariant*.

Prenons un exemple. Au paragraphe 3.1.2, nous avons défini les Hom-foncteurs $\mathrm{Hom}(C, -)$. Nous pouvons maintenant définir une notion similaire :

Les Hom-foncteurs contravariants Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et C un objet de $\mathcal{C}$. Le foncteur $\mathrm{Hom}(-,C) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{SET}$ est défini de la manière suivante :

OP-1: $\mathrm{Hom}(-,C)(A) = \mathrm{Hom}(A,C)$ pour tout objet A de $\mathcal{C}$
OP-2: $\mathrm{Hom}(-,C)(f) = \mathrm{Hom}(f,C) : \mathrm{Hom}(B,C) \to \mathrm{Hom}(A,C)$ pour $f : A \to B$.

Comme on peut s'y attendre, on pose pour $g : B \to C$:

$$\mathrm{Hom}(f,C)(g) = g \circ f.$$

4.2 Sous-catégorie

Ayant défini **CAT**, nous n'aurions en principe plus besoin d'étudier la notion de sous-catégorie. Une sous-catégorie est simplement un sous-objet d'un objet de **CAT**. Cependant, la notion de sous-objet étant assez difficile à manipuler, nous allons présenter ici une notion plus abordable — et bien sûr équivalente — de sous-catégorie.

Je vous laisse le soin, si cela vous intéresse, de prouver que cette définition de sous-catégorie correspond bien à la notion de sous-objet dans **CAT**. On a ici le même phénomène que dans **SET** : les deux notions ne se recoupent pas vraiment, mais les sous-catégories au sens de ci-dessous forment un système complet de représentants des sous-objets ; autrement dit, chaque sous-catégorie appartient à un unique sous-objet et chaque sous-objet contient une unique sous-catégorie.

Définition 23. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Une *sous-catégorie* $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ est une catégorie pour laquelle

S-1: $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{C}_0$ et $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{C}_1$.
S-2: Les fonctions source et but de $\mathcal{D}$ sont des restrictions de celles de $\mathcal{C}$.
S-3: La composition et l'identité de $\mathcal{D}$ sont des restrictions de celles de $\mathcal{C}$.
S-4: Si A est un objet de $\mathcal{D}$ alors id_A est dans $\mathcal{D}$.
S-5: Si f, g forment une paire composable dans $\mathcal{D}$, alors $f \circ g$ est dans $\mathcal{D}$.

Ces axiomes (pas forcément minimaux !) peuvent se résumer ainsi :

– une sous-catégorie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ a pour objets un sous-ensemble des objets de $\mathcal{C}$ et pour flèches un sous-ensemble des flèches de $\mathcal{C}$ (S-1).

– $\mathcal{D}$ a la même structure de graphe que $\mathcal{C}$, c'est à dire les “mêmes” fonctions source et but (S-2).

– $\mathcal{D}$ a la même structure de catégorie que $\mathcal{C}$, c'est à dire les mêmes flèches identité et la même composition (S-3).

– Avec cette structure, $\mathcal{D}$ est bien une catégorie ; donc elle contient toutes ses flèches identité (S-4) et la composition de toutes ses paires composables (S-5).

Il est facile de trouver de nombreux exemples de sous-catégories simples (Voyez par exemple ce que cela donne dans le cas des catégories élémentaires ou des ordres partiels que nous avons déjà vus). Nous n'en citerons qu'un exemple : la catégorie dont les objets sont les ensembles finis et les flèches les fonctions entre eux est une sous-catégorie de **SET**.

Notons que dans ce dernier cas, on parle de sous-catégorie *pleine*, car on a pris toutes les flèches dont les deux extrémités sont dans la sous-catégorie. Cette notion peut se formuler ainsi :

Définition 24. Soit $\mathcal{D}$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}$. Soit F le foncteur d'inclusion de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{C}$, c'est à dire le foncteur qui envoie chaque objet A de $\mathcal{D}$ sur le même objet A dans $\mathcal{C}$. Alors $\mathcal{D}$ est dite *pleine* si le foncteur F est plein.

D'habitude, pour spécifier une sous-catégorie d'une catégorie donnée, il faut en préciser les objets *et les flèches*. Cependant, dans le cas d'une sous-catégorie pleine, il suffit d'en donner les objets.

4.3 Produits de catégories

Vous avez sans aucun doute déjà rencontré plusieurs fois le produit cartésien de deux ensembles. Peut-être connaissez-vous aussi le produit de deux groupes, espaces vectoriels, espaces topologiques, ou autres structures mathématiques. Nous allons ici présenter la notion similaire pour les catégories.

Comme pour les sous-objets, on peut généraliser cette notion au produit de deux objets dans une catégorie ; on recouvre alors tous ces cas particuliers d'un seul coup. Nous étudierons cela au paragraphe 6.2.2.

Définition 25. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories. Le *produit* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est la catégorie définie par les axiomes suivants :

P-1: $(\mathcal{C} \times \mathcal{D})_0 = \mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}_0$.
P-2: $(\mathcal{C} \times \mathcal{D})_1 = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{D}_1$.
P-3: $\mathrm{source}(f,g) = (\mathrm{source}(f), \mathrm{source}(g))$ et $\mathrm{but}(f,g) = (\mathrm{but}(f), \mathrm{but}(g))$.
P-4: $\mathrm{id}_{(C,D)} = (\mathrm{id}_C, \mathrm{id}_D)$.
P-5: $(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g)$

En bref, $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ est la catégorie dont les objets (resp. les flèches) sont des paires d'objets (resp. de flèches) de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ (P-1 et P-2), et où toute la structure est définie "composante par composante" (P-3 à P-5).

On vérifie sans peine que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ est effectivement une catégorie, c'est à dire que cette définition vérifie bien les axiomes C-1 à C-4.

Comme dans le cas des ensembles, on peut définir les *projections* de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Ainsi, P_1 est le foncteur

$$P_1 : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}$$

qui envoie (C, D) sur C et (f, g) sur f. On vérifie sans peine qu'il s'agit bien là d'un foncteur. On peut faire de même pour la projection sur $\mathcal{D}$.

Cette construction nous permet de parler de foncteur “de plusieurs variables”. Par exemple, on peut maintenant définir le Hom-foncteur à deux variables

$$\mathrm{Hom}(-,-) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{SET}$$

qui envoie une paire d'objets (C, C') sur l'ensemble $\mathrm{Hom}(C, C')$ et une paire de flèches (f, f') sur la fonction $\mathrm{Hom}(f, f')$ qui agit naturellement de la manière suivante :

$$\mathrm{Hom}(f, g)(h) = g \circ h \circ f.$$

Notons que formellement, on a toujours affaire à un foncteur à un seul argument. Le fait que cet argument soit un produit nous permet d'exprimer ce que nous considérons comme un foncteur de deux variables sans compliquer la notion de foncteur. Ce type de démarche est assez courant en mathématiques.

4.4 Les catégories de flèches

La dernière construction de ce chapitre est un peu plus difficile à saisir que les précédentes. Cependant, l'investissement en vaut la peine, car cette construction est très utile à deux niveaux. D'une part, c'est une puissante notion mathématique qui permet d'unifier sous un même concept des constructions assez dissemblables. D'autre part, elle présente un intérêt conceptuel important, car elle permet de représenter les échanges entre diverses “structures” (diagrammes) d'une catégorie.

Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ des catégories, et F, G des foncteurs dans la configuration suivante :

$$\mathcal{D} \xrightarrow{F} \mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{E}.$$

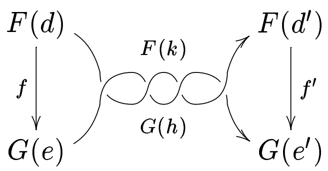
Nous appellerons *flèche de F vers G* un triple (d, e, f) où d est un objet de $\mathcal{D}$, e un objet de $\mathcal{E}$ et $f : F(d) \to G(e)$ une flèche de $\mathcal{C}$. Graphiquement, une flèche de F vers G se présente comme ceci :

$$\begin{tikzcd} F(d) \arrow[d, "f"] \\ G(e) \end{tikzcd}$$

Étant données deux flèches de F vers G, $f : F(d) \to G(e)$ et $f' : F(d') \to G(e')$, une *transformation de flèches* est une paire (k, h) avec $k : d \to d'$ une flèche de $\mathcal{D}$ et $h : e \to e'$ une flèche de $\mathcal{E}$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} F(d) \arrow[r, "F(k)"] \arrow[d, "f"'] & F(d') \arrow[d, "f'"] \\ G(e) \arrow[r, "G(h)"'] & G(e') \end{tikzcd}$$

Il est important de voir que le couple (k, h) forme *une seule* entité, et il serait peut-être plus judicieux de représenter une transformation de flèches de la manière suivante :



On peut maintenant formuler la définition qui nous intéresse :

Définition 26. Pour $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ et F, G comme ci-dessus, on définit la catégorie $(F \downarrow G)$ comme étant la catégorie dont les objets sont les flèches de F vers G et les flèches des transformations de flèches de F vers G. On appelle cette catégorie la *catégorie des flèches de* F *vers* G.

Pour que $(F \downarrow G)$ soit une catégorie, il faut préciser sa structure : la flèche identité de l'objet $F(d) \to G(e)$ est bien entendu la paire $(\mathrm{id}_d, \mathrm{id}_e)$, et la composition des deux transformations (k, h) et (k', h') est $(k \circ k', h \circ h')$. On vérifie alors facilement que $(F \downarrow G)$ est une catégorie.

Notons que cette construction est souvent appelée du nom anglais de *comma-category*, car elle était à l'origine notée (F, G) (*comma* = *virgule*). Je préfère ne pas utiliser cette appellation pour au moins deux raisons :

1. Si l'on appelait tout ce qui se note avec une virgule du nom de *virgule-...*, on risquerait de rencontrer des textes mathématiques où n'apparaît pratiquement qu'un seul mot.
2. La notation avec virgule a déjà été abandonnée en 1971 par [Mac71] au profit de celle que j'utilise ici... Alors pourquoi garder une appellation obsolète depuis au moins 27 ans ?

On peut définir une fonction

$$P_1 : (F \downarrow G) \to \mathcal{D}$$

de la manière suivante :

- $P_1(F(d) \to G(e)) = d$,
- $P_1(h, k) = h$ pour (h, k) une transformation de flèches.

Par analogie avec le cas d'un produit, nous appellerons P_1 *projection* sur $\mathcal{D}$.
On peut bien entendu définir de même la projection P_2 sur $\mathcal{E}$.

Si on voit F et G comme des diagrammes — donc des structures — dans $\mathcal{C}$, on peut considérer $(F \downarrow G)$ comme la catégorie représentant le *comportement* ou le *flux d'information* de F à G, comme le suggère la figure 4.1.

Je ne donnerai pas d'exemple mathématique de cette construction ; pour cela, reportez-vous à [Mac71]. Par contre, j'énumère ici quelque cas particuliers avec des interprétations possibles.

F constant Si F est constant — c'est à dire qu'il envoie tous les objets de $\mathcal{E}$ sur un même objet B de $\mathcal{C}$ et toutes les flèches de $\mathcal{E}$ sur id_B — alors on note facilement $(B \downarrow G)$ pour $(F \downarrow G)$.

On peut voir cette catégorie comme représentant le *comportement* de l'objet B par rapport à l'organisation G.

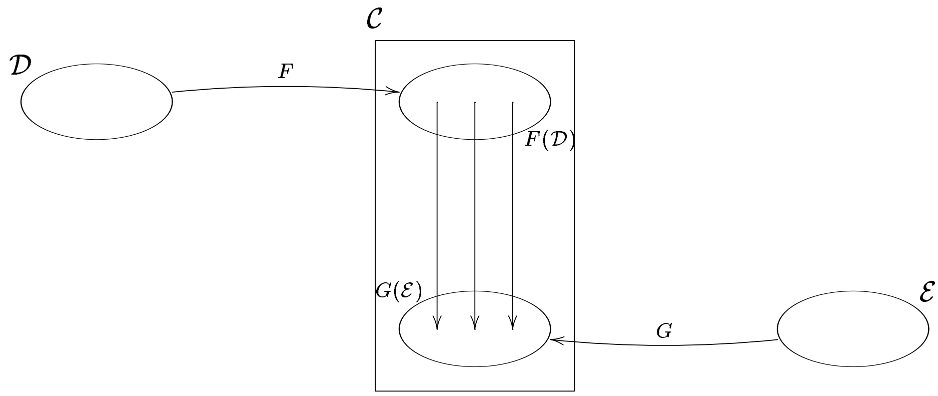


FIG. 4.1: *Une catégorie de flèches vue comme* flux d'information.

G constant Si c'est G qui est constant, on note facilement $(F \downarrow B)$.

Ceci représente plutôt l'information en provenance de F qui est accessible pour l'objet B.

F ou G identité Si F ou G est le foncteur identité[1], on notera plutôt $(\mathcal{C} \downarrow G)$ ou $(F \downarrow \mathcal{C})$.

Ceci est en accord avec la pratique courante de noter A pour id_A quand A est un objet d'une catégorie. Ce cas s'interprète comme les précédents, si ce n'est qu'il représente plutôt le comportement de F par rapport à tout son environnement (ou l'information de G sur son environnement).

En combinant ces cas particulier, on peut obtenir par exemple la catégorie $(\mathcal{C} \downarrow B)$, que Ehresmann et Vanbremeersch appellent le *paysage* de B ; en effet, cette catégorie représente la totalité de l'information accessible pour B (cf. la deuxième partie de ce mémoire pour plus de détails).

1. On doit alors avoir $\mathcal{D} = \mathcal{C}$ ou $\mathcal{E} = \mathcal{C}$

Chapitre 5

Transformations naturelles

5.1 Introduction

Toute cette introduction est dans le style informel que je note généralement en “petits caractères”. Cependant, vu sa longueur, je vais revenir momentanément à une mise en page “normale”.

Nous avons vu que les mathématiciens ont tendance, dès qu'ils définissent un objet, à étudier les transformations qui respectent la structure de cet objet. Ainsi par exemple, après avoir défini les catégories, nous avons étudié les foncteurs.

Les *transformations naturelles* sont aux foncteurs ce que les foncteurs sont aux catégories. Autrement dit, ce sont des transformations qui respectent la structure des foncteurs. La difficulté est de savoir exactement ce qu'est la structure d'un foncteur, et donc ce qu'il faut respecter ! Pour cela, il est utile de se rappeler que les foncteurs peuvent servir à spécifier des structures — et que dans ce cas on les appelle généralement diagrammes. Il est peut-être plus facile d'imaginer une transformation qui respecte la structure d'un diagramme que d'un foncteur, et j'utiliserai donc plusieurs fois cet angle de vue dans ce chapitre.

On peut raisonnablement se poser la question : “Pourquoi donc étudier des transformations de foncteurs ?”[1] Je vais tenter de donner un élément de réponse qui me paraît parlant (mais cet avis n'engage que moi).

Nous allons considérer deux foncteurs $\mathbf{GRF} \to \mathbf{SET}$. Le premier est le foncteur sous-jacent N qui envoie un graphe sur l'ensemble de ses nœuds. Le deuxième est le Hom-foncteur $\mathrm{Hom}(\epsilon, -)$, où ϵ est le graphe composé d'un seul nœud et pas de flèches. Si l'on remarque qu'un homomorphisme de ϵ dans un graphe quelconque G correspond essentiellement au choix d'un nœud de G, on se rend compte que $\mathrm{Hom}(\epsilon, -)(G)$ est essentiellement l'ensemble des nœuds de G, c'est à dire $N(G)$!

Là, le catégoricien que vous êtes en train de devenir devrait se réveiller et dire : “Ces deux foncteurs sont isomorphes”. Oui mais, pour être isomorphes, il faudrait que ce soient les objets d'une catégorie.

Notre programme est donc le suivant : Pour des catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, nous allons définir ce qu'est une transformation naturelle entre deux foncteurs $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, de telle sorte que l'ensemble de ces foncteurs munis de cette famille transformations forme une catégorie. Nous

1. Notez que l'on peut alors aussi se poser la question “Pourquoi étudier les catégories” ou même “Pourquoi étudier”... mais là, je n'ai pas de réponse toute faite.

aurons ainsi la possibilité, par exemple, de formuler clairement que les deux foncteurs ci-dessus sont isomorphes — et de le prouver !

5.2 Transformations naturelles

5.2.1 Définition

Pour clarifier cet exposé, nous allons introduire une troisième dimension dans nos illustrations ; ainsi, un couple de foncteurs $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ peut être visualisé comme illustré dans la figure 5.1.

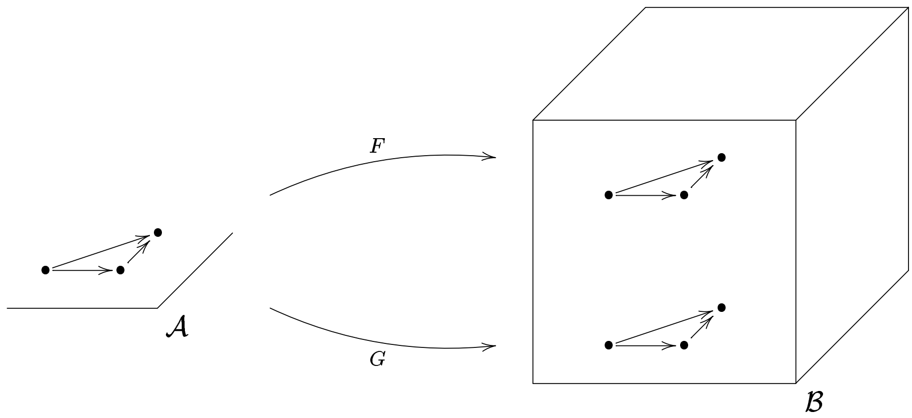


FIG. 5.1: *Un couple de foncteur*

Il faut cependant être conscient que cette “géométrisation” est uniquement à but didactique : il n'y a aucune raison *intrinsèque* aux catégories de représenter un objet “au-dessus” d'un autre, ou de dessiner une catégorie sur un plan plutôt que dans l'espace.

Définition 27. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des catégories et $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ des foncteurs. Une *transformation naturelle* $\alpha : F \to G$ est une famille de flèches αA indexée par les objets de $\mathcal{A}$ et vérifiant les axiomes suivants :

TN-1: $\alpha A : F(A) \to G(A)$ pour chaque objet A de $\mathcal{A}$.
TN-2: Pour tout $f : A \to B$ dans $\mathcal{A}$, on a $\alpha B \circ F(f) = G(f) \circ \alpha A$.

TN-2 est souvent formulée graphiquement en demandant que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha A"'] & F(B) \arrow[d, "\alpha B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

Notre représentation en volume devient alors celle de la figure 5.2.
Les flèches verticales sont appelées les *composantes* de α.

> Donc une transformation naturelle est une transformation du diagramme F au diagramme G qui est “compatible” avec les flèches du diagramme. On peut se “promener”

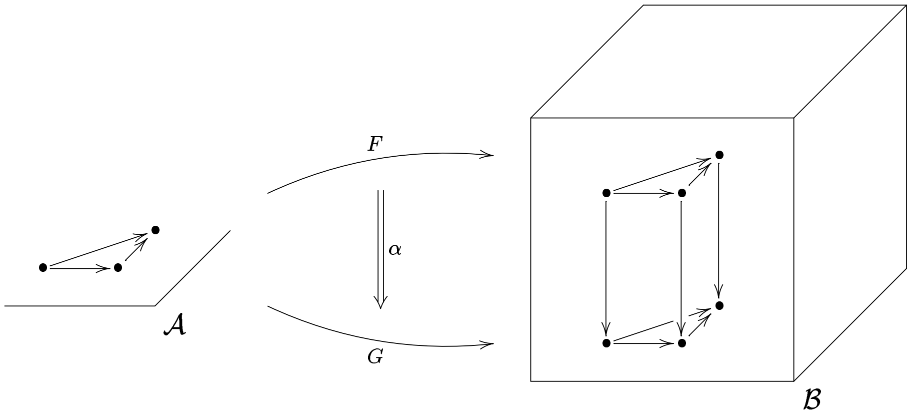


FIG. 5.2: *Une transformation naturelle*

dans F puis "descendre" dans G ou "descendre" tout de suite et faire la "même" promenade dans G ; cela doit revenir au même.

5.2.2 Exemples

Les transformations naturelles, vous vous en doutez, peuvent être des objets très complexes. Je ne donnerai donc ici que quelques exemples simples ; pour d'autres exemples, reportez-vous par exemple à [Mac71].

Ce qu'il est important de saisir ici, c'est que si les foncteurs F et G instancient une structure dans $\mathcal{B}$, alors les transformations naturelles sont les transformations qui respectent cette structure.

Attribution de rôles Nous avons vu au paragraphe 3.4 qu'on pouvait interpréter un foncteur de la catégorie $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[loop left] \arrow[r, "a"] & P \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

dans la catégorie **SET** (par exemple) comme une attribution de rôles. Voyons ce qu'une transformation naturelle représente alors.

Soient $F, G : \mathcal{A} \to \mathbf{SET}$. Prenons par exemple

- $F(R)$ ={Président, Secrétaire, Caissier, Intendant},
- $F(P)$ ={Paul, Pierre, Jean, Jacques},
- $G(R)$ ={Directeur, Secrétaire, Comptable, Concierge},
- $G(P)$ ={Luc, Pascal, Étienne, François},

avec $F(a)$ et $G(a)$ des fonctions attribuant ces rôles. Une transformation naturelle $\alpha : F \to G$ sera donc composée de deux fonctions $\alpha R : F(R) \to G(R)$ et $\alpha P : F(P) \to G(P)$ qui font commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\text{Président} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & \text{Paul} \arrow[ddd, mapsto] \\
& F(R) \arrow[r, "F(a)"] \arrow[d, "\alpha R"'] & F(P) \arrow[d, "\alpha P"] & \\
& G(R) \arrow[r, "G(a)"'] & G(P) & \\
\text{Directeur} \arrow[rrr, mapsto] & & & \text{Luc}
\end{tikzcd}$$

J'ai représenté le trajet de l'élément “Président” le long de ce diagramme pour bien illustrer ce qu'exige sa commutativité : α doit transformer les rôles et les personnes de manière compatible avec les attributions. Ainsi, si αR envoie “Président” sur “Directeur”, alors αP doit envoyer “Paul” sur “Luc”.

Notons que les quatre ensembles ci-dessus n'ont pas besoin d'être tous distincts. Par exemple, si $F(R) = G(R)$, α décrit plutôt une succession au sein d'une hiérarchie. Nous étudierons le cas $F(R) = F(P)$ au prochain paragraphe.

Homomorphisme de graphes Nous avons vu qu'un graphe pouvait être décrit comme un foncteur de la catégorie $\rightrightarrows$ dans **SET**. Dans ce cas, une transformation naturelle entre deux de ces foncteurs est exactement un homomorphisme de graphes. En effet, si l'on écrit les deux diagrammes exigés par TN-2, on obtient exactement ceux du paragraphe 2.1.3.

Ensembles ordonnés Si $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sont des foncteurs et $\mathcal{B}$ est la catégorie d'un ensemble ordonné, alors il existe une transformation naturelle de F à G si et seulement si $F(a) \leq G(a)$ pour tout objet a de $\mathcal{A}$. Ceci est simplement la traduction de TN-1 dans ce cas. Comme d'habitude, TN-2 n'ajoute pas de contrainte supplémentaire, puisqu'il y a au plus une flèche entre deux objets. Notons que cette transformation, si elle existe, est unique (pour la même raison).

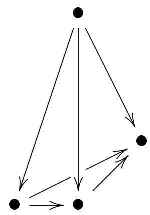
5.3 Cônes et co-cônes

Les transformations naturelles étant des transformations de diagrammes qui en préservent la structure, un cas particulier peut paraître intéressant ; en effet, lorsque l'un des diagrammes est réduit à un point, on peut espérer que dans un certain sens, il va “résumer” la structure de l'autre en un seul point.

Au fait, il faut un petit peu plus que cela pour obtenir une notion intéressante ; ce sera le sujet du chapitre 6. Mais cela n'empêche pas d'étudier déjà un peu ce qui se passe...

Définition 28. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des catégories et $C, D : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ des diagrammes (ou des foncteurs). Si C est constant de valeur S, une transformation naturelle $\alpha : C \to D$ est appelée *cône* au-dessus de D de sommet S.

Remarquons que pour que C soit qualifié de *constant*, il faut non seulement qu'il envoie tous les objets de $\mathcal{A}$ sur le même objet S, mais aussi toutes les flèches de $\mathcal{A}$ sur id_S. L'appellation de *cône* se comprend bien en contemplant la représentation suivante :

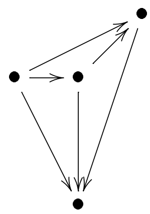


Les flèches “verticales” sont les composantes de la transformation naturelle α et par conséquent TN-2 exige la commutation de tous les triangles “verticaux”.

On peut considérer la notion duale :

Définition 29. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des catégories et $C, D : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ des diagrammes (ou des foncteurs). Si D est constant de valeur S, une transformation naturelle $\alpha : C \to D$ est appelée *co-cône* au-dessous de C de sommet S.

La représentation graphique devient alors la suivante :



Par exemple, dans la catégorie d'un ordre partiel, le sommet d'un cône sur D est un *minorant*, ou *borne inférieure* de D, c'est à dire un élément plus petit que tous les éléments de D. Le sommet d'un co-cône sous D est un *majorant*, ou *borne supérieure* de D.

Dans l'exemple de l'attribution de rôles, il est plus difficile de voir ce qui se passe si $F(R) = F(P) = S$. A la réflexion, on se rend compte qu'il faudrait que S soit formé de couples du genre (Président, Pierre). Nous y reviendrons quand nous parlerons de *limites* (cf. chapitre 6).

Les définitions 28 et 29 sont généralement données en termes des diagrammes commutatifs exigés par TN-2. Je dois à [Bol94] l'idée d'utiliser directement les transformations naturelles, ce qui permet une définition plus conceptuelle de ces notions.

5.4 Les catégories de foncteurs

Commençons par vérifier deux points importants :

Transformations identités Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des catégories. Pour un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, la famille de flèches $\{\mathrm{id}_{F(A)} | A \in \mathcal{A}\}$ est une transformation naturelle $\mathrm{id}_F : F \to F$. En effet, il est évident que le diagramme

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "id_{F(A)}"'] & F(B) \arrow[d, "id_{F(B)}"] \\ F(A) \arrow[r, "F(f)"] & F(B) \end{tikzcd}$$

commute.

Composition De plus, pour $G, H : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $\alpha : F \to G, \beta : G \to H$, la transformation obtenue en composant les flèches de α et β composante par composante est une transformation naturelle $\beta \circ \alpha : F \to H$. En effet, le rectangle extérieur dans

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha A"'] & F(B) \arrow[d, "\alpha B"] \\
G(A) \arrow[r, "G(f)"'] \arrow[d, "\beta A"'] & G(B) \arrow[d, "\beta B"] \\
H(A) \arrow[r, "H(f)"'] & H(A)
\end{tikzcd}$$

commute car les deux carrés commutent.

> Ce type de preuve "visuelle" est très courant en théorie des catégories. C'est dans ce genre d'application que la notion de diagramme montre toute sa force ; pour prouver que la composition de deux transformations naturelle est une transformation naturelle, on dessine le diagramme qui doit commuter... et c'est tout !

Les deux points que nous venons de vérifier nous permettent — vous l'avez vu venir — de parler de la catégorie des foncteurs de $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$:

Définition 30. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des catégories. Nous noterons $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et les flèches les transformations naturelles entre ces foncteurs.

Cette catégorie une fois définie, on peut se poser de nombreuses questions sur sa structure. Nous nous contenterons d'un résultat important :

Proposition 7. *Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des catégories. Soit α une flèche de* $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. *Alors α est un isomorphisme de* $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *si et seulement si pour tout objet A de $\mathcal{A}$, αA est un isomorphisme de $\mathcal{B}$.*

On peut exprimer cette proposition ainsi : "Une transformation naturelle est un isomorphisme si et seulement si toutes ses composantes sont des isomorphismes."

On appelle souvent une telle transformation naturelle un *isomorphisme naturel.*

Exemple Dans l'introduction, nous avons annoncé que les foncteurs $N : \mathbf{GRF} \to \mathbf{SET}$ et $\mathrm{Hom}(\epsilon, -) : \mathbf{GRF} \to \mathbf{SET}$ sont naturellement isomorphes ; pour voir ceci, nous allons construire l'isomorphisme composante par composante. Soit G un graphe. Alors on peut définir une transformation naturelle

$$\alpha : \mathrm{Hom}(\epsilon, -) \to N$$

de la manière suivante : pour un homomorphisme de graphes $f : \epsilon \to G$, $\alpha G(f)$ est l'image du seul nœud de ϵ par f. On a donc bien

$$\alpha G : \mathrm{Hom}(\epsilon, G) \to N(G),$$

et on voit facilement que cette flèche est un isomorphisme. De plus, on vérifie sans peine la naturalité de cette transformation (il suffit de dessiner le diagramme de TN-2).

Donc ces deux foncteurs sont bien isomorphes.

5.5 Équivalences de catégories

En tant qu'objets de la catégorie **CAT**, deux catégories peuvent être isomorphes. Cela signifie, littéralement, qu'elles ont la même forme. Il arrive cependant que deux catégories se ressemblent sans être isomorphes. C'est pourquoi on utilise parfois la notion moins forte d'équivalence de catégories.

Définition 31. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des catégories et $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur. F est appelé *équivalence de catégories* s'il existe un foncteur $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tel que $G \circ F$ est naturellement isomorphe à $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ et $F \circ G$ est naturellement isomorphe a $\mathrm{id}_{\mathcal{B}}$. G est appelé *pseudo-inverse* de F.

Cette définition nous dit donc que de faire $G \circ F$ revient essentiellement au même que de ne rien changer...

Ensembles finis A titre d'exemple, prenons pour $\mathcal{A}$ la sous-catégorie pleine de **SET** dont les objets sont les ensembles finis. Prenons pour $\mathcal{B}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ dont les objets sont les ensembles $\{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}$, etc.

Alors le foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ qui envoie chaque ensemble fini sur celui de même cardinalité dans $\mathcal{B}$ a pour pseudo-inverse l'inclusion $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$.[2]

Comme deux ensembles de même cardinalité sont isomorphes dans $\mathcal{A}$, on conçoit que l'on ne "perd pas trop" à ne garder qu'un seul ensemble de chaque cardinalité.

La notion d'équivalence permet donc de comparer des catégories "semblables", et qui ont pourtant des "tailles" très différentes.

La notion d'équivalence de catégories est traitée en détail dans [BW90], au paragraphe 3.4, et dans [Mac71], au paragraphe IV.4.

Notons encore que dans le cas ci-dessus, $\mathcal{A}$ est équivalent à une de ses sous-catégories pleines $\mathcal{B}$. Dans ce cas, on dit que $\mathcal{B}$ est un *squelette* de $\mathcal{A}$. Pour plus de détails, reportez-vous à [Mac71].

2. La construction précise de cette équivalence se trouve dans [Mac71], pp.17–18.

Chapitre 6

Limites et colimites

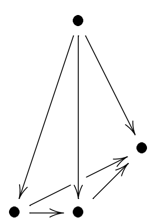
La notion de limite est une notion centrale dans de nombreuses applications de la théorie des catégories (cf. par exemple les travaux de Boldini, Ehresmann et Vanbremeersch, Sallantin, etc.). Dans [Mac71], on peut lire

> As Eilenberg-Mac Lane first observed, "category" has been defined in order to define "functor" and "functor" has been defined in order to define "natural transformation".

J'aurais presque envie de rajouter que dans cet ouvrage, j'ai défini les transformations naturelles dans le but d'obtenir une bonne définition de "cône", étape nécessaire vers la notion de "limite".

6.1 Les catégories de cônes

Au paragraphe 5.3, nous avons défini un cône comme étant une transformation naturelle d'un foncteur constant vers un autre foncteur. On a donc la configuration suivante



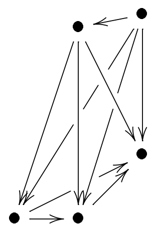
où tous les triangles "verticaux" commutent (par TN-2).

Définition 32. Soient D un diagramme et C, C' des cônes au-dessus de D de sommet S, S' respectivement. Une *flèche de C à C'* est une flèche $f : S \to S'$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "C_A"'] & & S' \arrow[dl, "C'_A"] \\ & D(A) & \end{tikzcd}$$

commute pour tout objet $D(A)$ du diagramme D.

Une flèche entre deux cônes est donc une flèche entre leurs sommets qui est “compatible” avec le cône en dessous. On veut donc que tous les triangles de la forme $\bigtriangledown$ commutent dans



Il est évident que pour un cône C de sommet S, id_S est une flèche de C dans C. De plus, la composition de deux flèches entre des cônes en est encore une. Pour un diagramme D donné, les cônes sur D forment donc une catégorie, appelée naturellement la *catégorie des cônes au-dessus de D*.

6.2 Limites

6.2.1 Définition

Avec ce que nous savons déjà, nous pouvons tout de suite aborder la définition qui nous intéresse :

Définition 33. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie et D un diagramme de $\mathcal{A}$. Si la catégorie des cônes au-dessus de D possède un élément terminal, celui-ci est appelé *limite de D*.

En d'autres termes, un cône L au-dessus de D est une limite de D si tout cône C sur D possède une unique flèche vers L.

Il est clair qu'une limite — en tant que cône — est unique à isomorphisme près, puisque c'est un élément terminal. De plus, on voit facilement que si deux cônes sont isomorphes, alors leur deux sommets le sont aussi. C'est pour cette raison que l'on appelle parfois *limite* le sommet du cône L. Mais il faut être bien conscient que ceci est un abus de langage : à proprement parler, une limite est composée du sommet *et des flèches* vers le diagramme D.

> La définition ci-dessus peut paraître obscure. Qu'y a-t-il de si intéressant dans un élément terminal de la catégorie des cônes ? Peut-être la reformulation suivante vous permettra-t-elle de mieux cerner cela : “Une limite L de D est un objet ayant un comportement cohérent envers D, et vérifiant la condition suivante : si S est un objet ayant un comportement cohérent envers D, alors ce comportement complexe peut se résumer de manière unique à un comportement simple envers L.”
>
> La notion de limite permet donc, dans un certain sens, de *condenser* une partie de la structure d'un diagramme complexe en un seul objet. C'est cela qui fait son intérêt.

6.2.2 Exemples

Pour mieux saisir cette notion, nous voyons ici quelques exemples courants. Notons que [Mac71] consacre un chapitre entier et la moitié d'un autre à la notion de limite. C'est donc là, une fois de plus, que vous pouvez vous reportez pour en savoir plus.

Ordres partiels Nous avons déjà vu que dans un ordre partiel, le sommet d'un cône sur D est un minorant de D. Il est facile de voir qu'une limite de D est un *infimum*, ou *plus grande borne inférieure*, de D[1]. En effet, ce doit être un minorant tel que tout autre minorant est plus petit que lui, ce qui est exactement la notion d'infimum !

Attribution de rôles Dans notre fameux exemple de l'attribution de rôles, que donne la notion de limite ? La limite (dans **SET**) du diagramme

$$R \xrightarrow{a} P$$

peut être vue comme étant le *graphe* de a, c'est à dire l'ensemble $\{(r, a(r)) \in R \times P | r \in R\}$ avec les projections évidentes sur R et P. Mais la limite peut également être le cône

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "\mathrm{id}_R"'] \arrow[dr, "a"] & \\ R \arrow[rr, "a"'] & & P \end{tikzcd}$$

Ces deux constructions — isomorphes mais distinctes — sont aussi "justes" l'une que l'autre, et ceci démontre que les flèches du cône sont aussi importantes que son sommet dans la description d'une limite.

Produits Soit D un diagramme discret, c'est à dire ayant pour seules flèches les identités. Si D admet une limite, alors celle-ci est appelée *produit* de D.

Dans **SET**, le produit dans ce sens coïncide avec le produit cartésien usuel. En effet, soient A et B des ensembles. Alors le cône de sommet $A \times B$ dont les flèches sont les projections sur A et B respectivement est une limite du diagramme formé de A et B ; pour un ensemble C et des fonctions $f : C \to A$ et $g : C \to B$, l'unique fonction $C \to A \times B$ exigée par la définition est la fonction $f \times g$ qui envoie c sur $(f(c), g(c))$, comme suggéré dans le dessin ci-dessous[2] :

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, dotted, "f \times g"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ & A \times B \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

Le cas du produit à n facteurs est tout à fait similaire.

De manière générale, le produit au sens catégoriel correspond au produit usuel dans de nombreuses catégories. Ainsi par exemple, il généralise le produit de monoïdes, de groupes, d'espaces vectoriels, d'espaces topologiques, et j'en passe.

Notons que dans **SET**, le produit cartésien induit le produit usuel sur les entiers si l'on considère la cardinalité des ensembles. En effet, le produit cartésien de deux ensembles de respectivement n et m éléments contient nm éléments.

1. La notion d'infimum est une généralisation de celle de minimum. Par exemple, l'ensemble $]0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ n'a pas de minimum ; cependant, 1 est son infimum.

2. Notons qu'il est courant, lorsqu'on veut traduire en diagramme une affirmation comme "il existe une unique flèche qui...", de représenter la flèche concernée en pointillés.

Égalisateurs Considérons le diagramme D suivant :

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B\,.$$

Sa limite, si elle existe, est appelée *égalisateur* de f et g. Notons que comme la flèche q dans le cône

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ A \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] & & B \end{tikzcd}$$

est forcément la composition $f \circ p = g \circ p$, on omet souvent de la représenter, et on dessine un égalisateur de la manière suivante :

$$E \xrightarrow{p} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

Prenons un exemple dans **SET** pour mieux voir ce que cela représente. Soient $A = \mathbb{R}^2$ et $B = \mathbb{R}$; prenons pour f la fonction de valeur constante 1 et pour g la fonction qui envoie (x, y) sur $x^2 + y^2$:

$$\mathbb{R}^2 \underset{x^2+y^2}{\overset{1}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}$$

Alors l'égalisateur de f et g est (à isomorphisme près !) le cercle unité

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 = 1\}$$

muni de son inclusion canonique i dans $\mathbb{R}^2$, ce qui nous donne le diagramme suivant :

$$S_1 \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^2 \underset{x^2+y^2}{\overset{1}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}$$

> Ceci suggère une bonne manière de voir un égalisateur dans **SET** : c'est le plus grand sous-ensemble de A qui vérifie l'équation exprimée par la paire de flèches parallèles f et g.

Pull-backs Considérons la limite P du diagramme suivant :

$$A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$$

Si elle existe, elle est appelée *pull-back* de f et g [3]. Par habitude, on omet la flèche "forcée" [4] $P \to C$ du cône limite, et on représente le pull-back P de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

3. Ce n'est pas que je sois un grand amateur d'anglicismes, mais je crois qu'il n'y a pas de nom standard en français...

4. Cette flèche est déterminée par les autres flèches et par les exigences de commutativité du cône limite.

Rappelons encore une fois que le fait que P soit limite du diagramme D signifie que pour tout cône de sommet Q sur D, il existe une unique flèche $Q \to P$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & P \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Dans **SET**, P est l'ensemble

$$\{(a, b) \in A \times B | f(a) = g(b)\}.$$

Ceci se vérifie facilement en suivant la définition.

> Prenons un exemple concret. Nous sommes dans un restaurant ; A est l'ensemble des entrées et B l'ensemble des plats sur la carte. C est l'ensemble {printemps, été, automne, hiver}, et f et g envoient chaque entrée ou plat sur la saison à laquelle on peut le servir (p.ex. f(asperges)=printemps). Alors P est l'ensemble des menus cohérents, c'est à dire le menus que l'on peut servir sans attendre des mois entre l'entrée et le plat !

On pourrait donner encore bien d'autres exemples de limites ; pour des raisons de place, nous nous arrêterons cependant ici. Notons qu'il existe des résultats intéressants sur la classification des limites, comme par exemple :

Proposition 8. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie contenant tous ses produits et tous ses égalisateurs. Alors $\mathcal{A}$ contient toutes ses limites.*

La preuve est constructive : elle décrit la construction d'une limite quelconque à partir de produits et d'égalisateurs. Pour les détails, reportez-vous à [BW90].

> Il existe d'autres familles de limites qui suffisent à engendrer les autres, ainsi que de nombreux cas particuliers qui présentent les intérêts les plus divers. Faire le tour de la question dépasse largement la prétention de ce texte....

6.3 Colimites

La colimite — on s'en doute — est la notion duale de la limite. Nous allons passer rapidement sur les définitions et exemples qui sont finalement assez proches de ceux du paragraphe précédent.

6.3.1 Définition

On peut définir une structure de catégorie sur l'ensemble des co-cônes au-dessus de D exactement de la même manière que pour les cônes. On peut alors poser la définition suivante :

Définition 34. Une *colimite* du diagramme D est un objet initial de la catégorie des co-cônes au-dessous de D.

Comme une limite, une colimite est unique à isomorphisme près. Ceci est une conséquence directe de la dualité des deux notions : les résultats acquis pour les limites s'appliquent également aux colimites.

6.3.2 Exemples

Dans un ordre partiel, une colimite d'un diagramme D est un *supremum*, ou *plus petite borne supérieure*, de D ; ceci n'est pas surprenant puisque la limite de D, si elle existe, en est l'infimum...

Parcourons maintenant rapidement les différents types de diagrammes dont nous avons étudié les limites.

Sommes La colimite d'un diagramme discret D s'appelle *co-produit*, ou *somme*, de D. Dans **SET**, cela nous donne la notion de *réunion disjointe* [5]. Notons que du point de vue de la cardinalité, c'est bien une somme qui est effectuée.

Co-égalisateurs La colimite L du diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

s'appelle co-égalisateur. On omet généralement la flèche forcée $A \to L$ dans la représentation, ce qui nous donne

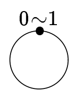
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "p"] & L. \end{tikzcd}$$

Dans **SET**, le coégalisateur du diagramme ci-dessus peut être vu comme l'ensemble obtenu par une *identification minimale* des éléments de B pour que l'équation exprimée par la paire de flèches parallèles soit vérifiée. Ainsi par exemple, si on prend pour A l'ensemble à un élément $\{*\}$ et pour B le segment $[0,1]$; et si f et g sont les fonctions qui envoient $*$ sur 0 et 1 respectivement

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, shift left, "0"] \arrow[r, shift right, "1"'] & {[0,1]}, \end{tikzcd}$$

alors le coégalisateur est le segment $[0,1]$ où l'on "recolle" 0 et 1, ce qui nous donne le diagramme

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, shift left, "0"] \arrow[r, shift right, "1"'] & {[0,1]} \arrow[r, "p"] & {} \end{tikzcd}$$



.

> Au fait, pour être tout à fait correcte, cette construction devrait se faire dans la catégorie des espaces topologiques. Si vous n'êtes pas familier avec la topologie, prenez l'exemple ci-dessus dans un sens métaphorique.

---

5. La réunion disjointe de deux ensembles est l'ensemble obtenu en les réunissant *sans identifier les éléments semblables*. Ainsi par exemple, la réunion disjointe de $a = \{1,2\}$ et $b = \{2,3\}$ est $a \amalg b\{1, 2_a, 2_b, 3\}$.

Pushouts La notion duale du pullback est le *pushout*. Un pushout est donc une colimite du diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

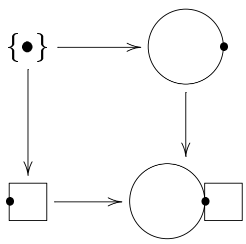
Comme précédemment, on omet généralement la flèche “diagonale” du cône limite — qui est forcée par la composition des autres — et on représente la caractéristique d'un pushout de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\ C \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & P \arrow[dr, dotted] & \\ & & Q \end{tikzcd}$$

Dans **SET**, on peut décrire P comme étant la somme de B et C où l'on identifie les points qui sont images du même élément de A :

$$P = B \amalg C / \sim$$

où $\sim$ est défini par $f(a) = g(a)$. Par exemple, si A est l'ensemble à un point et B et C sont des objets géométriques, P est l'objet obtenu en recollant B et C sur l'image de A :



Chapitre 7

Foncteurs représentables et éléments universels

Les notions de limites, foncteurs représentables et éléments universels sont étroitement liées. Comme nous avons étudié assez en détail les problématiques relatives aux limites, nous passerons plus rapidement sur les deux autres sujets.

7.1 Foncteurs représentables

Pour une catégorie $\mathcal{A}$, un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est essentiellement un objet *externe*. La question est de savoir s'il y a parfois un moyen de le représenter de manière plus ou moins *interne* à la catégorie. Il arrive que cela soit possible dans le cas où $\mathcal{B}$ est la catégorie **SET**.

Définition 35. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie et $F : \mathcal{A} \to \mathbf{SET}$ un foncteur. S'il existe un objet A de $\mathcal{A}$ et un isomorphisme naturel $\alpha : \mathrm{Hom}(A, -) \to F$, alors F est dit *représentable* ; dans ce cas, on dit que A *représente* F.

Notons qu'il existe une notion similaire pour les foncteurs contravariants : un tel foncteur est dit *représentable* si il est naturellement isomorphe à un $\mathrm{Hom}(-, C)$.

Nous avons déjà vu un exemple de foncteur représentable au paragraphe 5.4, où nous avons prouvé que le foncteur "Ensemble des nœuds" $\mathbf{GRF} \to \mathbf{SET}$ est isomorphe à un Hom-foncteur.

Nous verrons un exemple d'utilisation des foncteurs représentables au chapitre 10, où cet outil est utilisé pour obtenir une notion de sous-objet qui soit interne à la catégorie...

7.2 Le lemme de Yoneda

Le paragraphe précédent suggère d'étudier de plus près les transformations naturelles dont le domaine est un Hom-foncteur. L'outil catégoriel de base dans ce contexte est le lemme de Yoneda.

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie et $F : \mathcal{A} \to \mathbf{SET}$ un foncteur. Étant donné un objet C de $\mathcal{A}$, le problème qui nous intéresse est de classifier les transformations naturelles

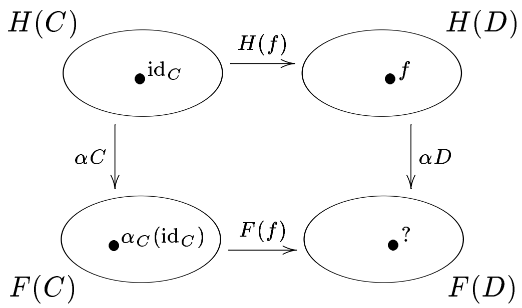
$$\alpha : \mathrm{Hom}(C, -) \to F.$$

Pour simplifier l'écriture dans ce qui suit, nous noterons H pour $\mathrm{Hom}(C, -)$.

Soient D un objet de $\mathcal{A}$ et $f : C \to D$ une flèche de $\mathcal{A}$. Alors TN-2 exige que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
H(C) \arrow[r, "H(f)"] \arrow[d, "\alpha C"'] & H(D) \arrow[d, "\alpha D"] \\
F(C) \arrow[r, "F(f)"'] & F(D)
\end{tikzcd}$$

Les quatre sommets de ce diagramme sont des ensembles et les quatre flèches des fonctions. De plus, $H(C) = \mathrm{Hom}(C, C)$ contient forcément id_C. Voyons quel doit être le "trajet" de cet élément dans le diagramme :



Ainsi, on voit que le choix de l'image par αC de id_C détermine complètement α ; en effet, on doit avoir

$$\alpha D(f) = F(f)(\alpha(\mathrm{id}_C)).$$

Réciproquement, il est clair que α détermine $\alpha C(\mathrm{id}_C)$! On a donc esquissé le contenu du très célèbre *lemme de Yoneda*. Pour l'exprimer clairement, nous noterons $\mathrm{TN}(A, B)$ l'ensemble des transformations naturelles du foncteur A au foncteur B.

Lemme de Yoneda. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie, $F : \mathcal{A} \to$ **SET** un foncteur et C un objet de $\mathcal{A}$. Alors on a une bijection*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{TN}(\mathrm{Hom}(C,-), F) & \cong & F(C) \\ \alpha & \mapsto & \alpha C(\mathrm{id}_C) \end{array}$$

d'inverse $c \mapsto \alpha_c$, où α_c est défini par

$$\alpha_c D(f) = F(f)(c).$$

La preuve de ce lemme ne repose que sur des vérifications de routine : vérifier que l'inverse que je donne est bien un inverse, et que α_c est effectivement une transformation naturelle. Je vous encourage à effectuer ces vérifications, pour vous familiariser avec ce résultat.

Ce "lemme de Yoneda" peut sembler absolument trivial et sans intérêt ; Du point de vue purement formel, il est effectivement trivial. Mais pas sans intérêt. En effet, les objets qu'il met en bijection sont souvent de nature très différente. A ce niveau d'abstraction, on obtient donc sans effort un résultat qui peut être très puissant dans certains cas.

Pour dévoiler toute la puissance de ce résultat, il faudrait l'appliquer à des objets mathématiques relativement complexes ; cependant, nous ne verrons qu'un exemple simple — qui ne nous apprendra rien de nouveau — mais qui a l'avantage d'être facilement compréhensible.

L'exemple des graphes Prenons pour $\mathcal{A}$ la catégorie

$$\begin{tikzcd} F \arrow[loop left] \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "b"'] & O \arrow[loop right] \end{tikzcd} .$$

Un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathbf{SET}$ peut donc être vu comme un graphe. Le lemme de Yoneda s'applique une fois par objet de $\mathcal{A}$, donc en l'occurrence deux fois.

Appliquons-le à F. Le foncteur $\mathrm{Hom}(F, -)$ représente le graphe δ composé d'une seule flèche et de ses deux extrémités :

$$s \xrightarrow{\mathrm{id}_F} b$$

En effet, $\mathrm{Hom}(F, F)$ est l'ensemble $\{\mathrm{id}_F\}$ et $\mathrm{Hom}(F, O)$ est l'ensemble $\{s, b\}$. Si on interprète ce foncteur comme un graphe, ces ensembles nous en donnent respectivement les flèches et les nœuds.

Une transformation naturelle de $\mathrm{Hom}(F, -)$ dans un foncteur G peut donc être vue comme un homomorphisme de δ dans le graphe représenté par G. Or Yoneda nous dit que ces homomorphismes sont en bijection avec $G(F)$. Donc il y a autant d'homomorphismes de δ dans le graphe G que de flèches dans G... ce qui n'est pas une surprise !

Appliqué à O, le lemme de Yoneda nous donne un résultat similaire : Si on note ϵ le graphe composé d'un seul objet et pas de flèches, les homomorphismes de ϵ dans un graphe G quelconque sont en bijection avec les nœuds de G.

Il est vrai que ces applications ne nous ont rien appris de nouveau. Libre à vous de chercher d'autres exemples plus compliqués où les résultats seraient plus spectaculaires ; on en trouve par exemple dans le domaine de la topologie.

Comme les applications "intéressantes" de Yoneda se trouvent souvent dans les hautes sphères mathématiques, je ne vais plus beaucoup en parler dans ce texte. Cependant, il était impossible de ne pas le citer, vu son importance capitale dans le travail courant du catégoricien.

7.3 Éléments universels

Les éléments universels — ou la notion proche de flèches universelles — sont très courants dans la littérature catégorielle. Dans ce texte, je les ai un peu éclipsés au profit des limites. Voici tout de même leur définition.

Définition 36. Soient C un objet de la catégorie $\mathcal{A}$ et $F : \mathcal{A} \to \mathbf{SET}$ un foncteur ; soit c un élément de $F(C)$. Si la transformation naturelle

$$\alpha_c : \mathrm{Hom}(C, -) \to F$$

décrite ci-dessus est un isomorphisme, alors c est appelé *élément universel* de F.

On peut reformuler cette définition sans passer par les transformations naturelles :

Proposition 9. *Soient $F : \mathcal{C} \to \mathbf{SET}$ un foncteur, C un objet de $\mathcal{C}$ et $c \in F(C)$. Alors c est un élément universel de F si et seulement si pour tout objet C' de $\mathcal{C}$ et tout élément $x \in F(C')$ il existe une unique flèche $f : C \to C'$ vérifiant $F(f)(c) = x$.*

La preuve est facile. Cette proposition a une conséquence qui peut être utile en certaines occasions :

Corollaire 1. *Si $c \in F(C)$ et $c' \in F(C')$ sont tous deux des éléments universels de F, alors il existe un unique isomorphisme $f : C \to C'$ tel que $F(f)(c) = c'$.*

Si le foncteur F admet un élément universel, alors il est représentable ; ceci est une conséquence directe des définitions. De plus, si le F est représentable, le lemme de Yoneda nous en fournit un élément universel. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Proposition 10. *Le foncteur $F : \mathcal{C} \to$ **SET** est représentable si et seulement s'il admet un élément universel.*

Les deux notions titres de ce chapitre sont donc étroitement liées. De plus, elles sont très proches de la notion de limite. On peut effectivement définir une limite comme étant un élément universel d'un certain foncteur ; mais on peut également parler d'un élément universel comme étant la limite d'un certain diagramme...

Une étude détaillée des liens entre ces notions prendrait trop de place ici ; il est cependant important de comprendre que foncteurs représentables, éléments universels et limites sont trois facettes d'un même problème, et que le choix de l'une ou l'autre est avant tout une question de *point de vue.*

Dans ce texte, j'ai choisi de mettre l'accent sur les limites, car ce sont elles, me semble-t-il, qui ont rencontré le plus de succès hors-mathématiques.

Chapitre 8

Adjonction

8.1 Introduction

Comme pour le chapitre 5, toute cette introduction est dans un style informel. Les idées que je propose ici sont tout à fait personnelles, et n'ont d'autre prétention que de vous aider à *sentir* le concept qui fait le titre de ce chapitre.

Le concept d'adjonction est un concept clé de la théorie des catégorie ; il s'agit d'une notion très générale qui regroupe sous un seul nom à peu près tout ce que nous avons vu jusqu'à maintenant. Dès lors, on conçoit qu'il soit difficile de bien cerner une telle notion. Pour vous aider, je vous propose ici une interprétation métaphorique ; celle-ci n'a aucune prétention psychologique ou mathématique, mais mon espoir est de vous donner une *perception globale* du concept.

Vous êtes-vous déjà demandé comment il est possible qu'un humain puisse utiliser une calculette ? en effet, je suis strictement incapable de percevoir les impulsions électroniques qui voyagent dans ma calculette, et celle-ci, à ma connaissance, ne peut pas concevoir le nombre 2 au sens où je l'utilise.

Par contre, il a été défini un protocole d'échange, qui permet à l'information de circuler de moi à la calculette — via un clavier —, et dans l'autre sens — via un écran. Pour les besoins de la cause, je vais supposer que ce protocole d'échange me permet de me forger une certaine représentation de ma machine, laquelle de son côté peut se faire une certaine image de moi (!)

Ceci nous permet à tous les deux de nous représenter le dialogue que nous sommes en train d'avoir.

On peut alors faire l'hypothèse suivante : pour que la calculette puisse “comprendre” mes ordres — et moi ses réponses — il faut qu'il y ait une certaine ressemblance entre nos représentations respectives de l'échange que nous avons.

On peut traduire cette idée en termes catégoriels : le protocole d'échange entre deux catégories est formé de deux foncteurs (un dans chaque sens) ; l'image qu'une catégorie se fait de l'autre est l'image, au sens mathématique, du foncteur correspondant. La représentation du dialogue est alors une *catégorie de flèches* adéquate. Enfin, la notion qui décrit que nos catégories se “comprennent” est celle d'adjonction.

L'intuition d'utiliser l'adjonction pour parler de la prédictibilité d'une machine me vient de J. Sallantin. Je crois cependant que ma manière de préciser cette idée est assez éloignée de sa pensée de départ...

8.2 Définition

Notation. A partir de maintenant, nous nous permettrons de sous-entendre les parenthèses et les "$\circ$" lorsque le contexte est clair. Ainsi par exemple, nous noterons $GFGB$ au lieu de $G \circ F \circ G(B)$ ou de $G(F(G(B)))$.

Définition 37. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des catégories et F, G des foncteurs dans la configuration suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{B} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

On dit que F est l'*adjoint à gauche* de G — et que G est l'*adjoint à droite* de F — s'il existe un isomorphisme

$$\theta : (\mathcal{A} \downarrow G) \to (F \downarrow \mathcal{B})$$

tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{A} \downarrow G) \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr] & & (F \downarrow \mathcal{B}) \arrow[dl] \\ & \mathcal{A} \times \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

où les composantes des flèches obliques sont les projections définies au paragraphe 4.4.

Pour exprimer la commutativité du diagramme ci-dessus, on dit aussi que θ est un *isomorphisme au-dessus de* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Il est important de bien comprendre ce que signifie cette commutativité ; prenons une flèche de $(\mathcal{A} \downarrow G)$, munie de ses deux extrémités :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[r, "h"] & A' \arrow[d, "f'"] \\ GB \arrow[r, "Gk"'] & GB' \end{tikzcd}$$

Elle doit être envoyée par θ sur une flèche de la forme

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[d, "g"'] \arrow[r, "Fh"] & FA' \arrow[d, "g'"] \\ B \arrow[r, "k"'] & B' \end{tikzcd}$$

L'existence d'un isomorphisme de catégories de flèches correspond bien à ce que j'annonçais dans l'introduction. Le fait que cet homomorphisme doive être *au-dessus de* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ peut être interprété ainsi : non seulement, ces catégories doivent être isomorphes, mais les objets mis ainsi en correspondance doivent avoir une certaine cohérence : on pourrait imaginer que l'isomorphisme est présent, mais que quand je demande à ma machine d'élever un nombre au carré, elle en prenne le sinus !

8.3 Une autre définition

La définition que j'ai donnée au paragraphe précédent, due à F. Lawvere, a l'avantage d'être très conceptuelle, concise et, à mon goût, élégante. Par contre, elle est peu opératoire : vérifier que deux foncteurs sont adjoints relève du calvaire ! C'est sans doute pour cela que cette définition est peu courante dans la littérature.

Dans ce paragraphe, je vais donner une définition plus technique, qui permet dans bien des cas de limiter les vérifications à peu de choses. C'est cette définition-là, ou une semblable, que l'on trouve dans la plupart des ouvrages.

Définition 38. Dans la même configuration que ci-dessus, on dit que F est l'*adjoint à gauche* de G si il existe une transformation naturelle $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \to GF$ telle que pour toute flèche $f : A \to GB$ avec A un objet de $\mathcal{A}$ et B un objet de $\mathcal{B}$ il existe une unique flèche $g : FA \to B$ avec $f = Gg \circ \eta A$.

Cette définition n'a pas la symétrie de la précédente. Cependant, on peut la rétablir à l'aide du résultat suivant :

Proposition 11. *Si F est adjoint à gauche de G, alors il existe une transformation naturelle $\epsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ telle que pour toute flèche $g : FA \to B$ il existe une unique flèche $f : A \to GB$ avec $g = \epsilon B \circ Ff$.*

En dualisant cette proposition, on obtient que ces deux caractérisations sont équivalentes.

La preuve n'est pas difficile, mais elle est assez longue. Vous pouvez vous reportez à [BW90], au chapitre 12. Je préfère garder cette place pour prouver l'équivalence entre les deux définitions que j'ai données. Mais tout d'abord, voici quelques exemples.

8.4 Exemples

Je donne ici, sans preuve, divers exemples d'adjoints. La plupart des vérifications sont de la pure routine. Si vous rencontrez un problème, reportez-vous à la nombreuse littérature sur la question.

Ensembles de parties Soit A un ensemble. Alors l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des parties de A peut être vu comme un ordre partiel, ordonné par l'inclusion, et donc comme une catégorie.

Soient A, B des ensembles et $f : A \to B$ une fonction. Alors f induit un foncteur $f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$[1] par la formule

$$f^{-1}(B_0) = \{a \in A | f(a) \in B_0\}.$$

Ce foncteur admet comme adjoint à gauche le foncteur f_* défini par

$$f_*(A_0) = \{f(a) | a \in A_0\},$$

et comme adjoint à droite le foncteur $f_!$ défini comme suit :

$$b \in f_!(A_0) \iff f^{-1}(b) \subseteq A_0.$$

1. On voit souvent f^{-1} comme une fonction $B \to \mathcal{P}(A)$; le choix de prendre la *catégorie* $\mathcal{P}(B)$ comme domaine permet cependant de faire de cette construction un foncteur $\mathcal{P} : \mathbf{SET} \to \mathbf{CAT}$.

Structures libres Nous avons déjà dit au paragraphe 3.1.2 que les foncteurs libres sont des adjoints à gauche des foncteurs oublieux. Par exemple, l'adjoint à gauche du foncteur oublieux $\mathbf{CAT} \to \mathbf{GRF}$ est le foncteur $\mathbf{GRF} \to \mathbf{CAT}$ qui envoie chaque graphe sur la catégorie libre correspondante.

C'est là que la notion d'adjonction révèle toute sa force : la description formelle d'une catégorie libre est assez délicate, alors que celle d'un graphe sous-jacent est triviale. Or il suffit de décrire la seconde pour avoir une bonne caractérisation de la première.

Cet exemple peut aussi s'appliquer au cas des monoïdes libres, et aux autres structures libres que vous pourriez connaître (groupes, anneaux, modules, ...).

Objets initiaux et terminaux Soit $\mathbf{1}$ la catégorie élémentaire formée d'un seul objet (cf p.20) et soit $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque. Alors si $\mathcal{C}$ admet un objet initial I, le foncteur $\mathbf{1} \to \mathcal{C}$ qui envoie l'unique objet de $\mathbf{1}$ sur I est un adjoint à gauche du foncteur constant $\mathcal{C} \to \mathbf{1}$. Dualement, si $\mathcal{C}$ admet un objet terminal T, le foncteur $\mathbf{1} \to \mathcal{C}$ d'image T est un adjoint à droite du même foncteur constant.

Limites Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{C}$ des catégories. On peut construire la catégorie $\mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ des diagrammes dans $\mathcal{C}$ de forme $\mathcal{I}$. Considérons le foncteur

$$\delta : \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$$

qui envoie chaque objet C de $\mathcal{C}$ sur le diagramme constant de valeur C. Alors si $\mathcal{C}$ possède toutes les limites de ses diagrammes de forme $\mathcal{I}$, le foncteur qui envoie chaque diagramme de $\mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ sur sa limite est un adjoint à droite de δ.

Dualement, le foncteur qui envoie chaque diagramme sur sa colimite, s'il existe, est un adjoint à gauche de δ.

> La métaphore de la calculette nous suggère d'interpréter une adjonction comme une situation où deux catégories se "comprennent" ; il est intéressant de voir en quoi cela peut nous aider à comprendre ce dernier exemple.
>
> Si on part de l'idée que les deux catégories en jeu peuvent se "comprendre" il paraît plausible que la catégorie de diagrammes "voit" un objet de $\mathcal{C}$ comme un diagramme constant. $\mathcal{C}$, quand à elle, ne peut pas concevoir ce qu'est un diagramme ; pour appréhender les objets de $\mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$, il faudrait donc qu'elle possède des objets qui dans un certain sens "résument" ces diagrammes... ce qui est précisément le sens intuitif que j'ai proposé pour les limites et colimites.
>
> Il est clair que ceci n'est pas une preuve ; cependant, ce type de raisonnement peut donner une intuition sur quel est l'adjoint d'un foncteur donné. Après, il ne reste plus que les vérifications d'usage...

8.5 Preuve de l'équivalence des définitions

Nous allons maintenant prouver que les définitions 37 et 38 sont équivalentes. Ceci nous permettra de nous familiariser non seulement avec la notion d'adjonction, mais également avec les catégories de flèches.

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sont des catégories et F, G des foncteurs dans la configuration

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{B} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd} .$$

8.5.1 Définition 37 $\Longrightarrow$ Définition 38

Supposons que F et G sont adjoints au sens de la définition 37. Soit θ l'isomorphisme impliqué par cette définition.

Soit $A \in \mathcal{A}$. On a $\mathrm{id}_{FA} \in (F \downarrow \mathcal{B})$, et on peut donc poser

$$\eta A = \theta^{-1}(\mathrm{id}_{FA}).$$

Alors η ainsi défini est une transformation naturelle $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \to GF$. En effet, on a $\eta A : A \to GFA$ pour tout objet A. Il faut encore vérifier TN-2. Pour cela, partons du carré

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{FA}"'] & FB \arrow[d, "\mathrm{id}_{FB}"] \\ FA \arrow[r, "Ff"'] & FB \end{tikzcd}$$

qui est évidemment commutatif. On peut donc le voir comme une flèche de $(F \downarrow \mathcal{B})$:

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[d, "\mathrm{id}_{FA}"'] \arrow[r, "Ff"] & FB \arrow[d, "\mathrm{id}_{FB}"] \\ FA \arrow[r, "Ff"'] & FB \end{tikzcd} .$$

L'image par θ^{-1} de cette flèche est

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[d, "\eta A"'] \arrow[r, "f"] & B \arrow[d, "\eta B"] \\ GFA \arrow[r, "GFf"'] & GFB \end{tikzcd} .$$

Or si on "dénoue" ce diagramme, on obtient le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta A"'] & B \arrow[d, "\eta B"] \\ GFA \arrow[r, "GFf"'] & GFB \end{tikzcd}$$

qui est précisément TN-2 dans notre cas.

Il reste à vérifier l'affirmation sur les flèches ; considérons une flèche $f : A \to GB$. Alors dire d'une flèche $g : FA \to B$ que $f = Gg \circ \eta A$ revient à affirmer la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\eta A"'] & A \arrow[d, "f"] \\ GFA \arrow[r, "Gg"'] & GB \end{tikzcd}$$

Donc cela revient à dire que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\eta A"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] & A \arrow[d, "f"] \\ GFA \arrow[r, "Gg"'] & GB \end{tikzcd}$$

est une flèche de $(\mathcal{A} \downarrow G)$. Ceci est le cas si et seulement si son image par θ

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[d, "\mathrm{id}_{FA}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_{FA}"] & FA \arrow[d, "\theta f"] \\ FA \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

est une flèche de $(F \downarrow \mathcal{B})$, c'est-à-dire si le diagramme

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\mathrm{id}_{FA}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{FA}"'] & FA \arrow[d, "\theta f"] \\ FA \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

commute. Donc on obtient

$$f = Gg \circ \eta A \iff g = \theta f.$$

Comme θ est un isomorphisme, on obtient bien l'existence et l'unicité d'une telle flèche, ce qui complète la preuve.

8.5.2 Définition 38 $\Longrightarrow$ Définition 37

Supposons maintenant que F et G sont adjoints au sens de la définition 38. Il nous faut construire un isomorphisme de catégories de flèches.

Par définition, pour toute flèche $f : A \to GB$ il existe une unique flèche $g : FA \to B$ vérifiant certaines propriétés ; cela nous fournit une bijection θ entre les objets de $(\mathcal{A} \downarrow G)$ et de $(F \downarrow \mathcal{B})$. Nous allons prolonger cette bijection sur les flèches de la manière suivante : l'image par θ d'une flèche (f, Gg) de $(\mathcal{A} \downarrow G)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "O"'] \arrow[r, "f"] & A' \arrow[d, "O'"] \\ GB \arrow[r, "Gg"'] & GB' \end{tikzcd}$$

est la flèche de $(F \downarrow \mathcal{B})$

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[d, "\theta O"'] \arrow[r, "Ff"] & FA' \arrow[d, "\theta O'"] \\ B \arrow[r, "g"'] & B' \end{tikzcd} .$$

Pour poser cela, il faut vérifier que ceci est bien une flèche de $(\mathcal{A} \downarrow G)$, donc que le carré suivant commute :

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\theta O"'] & FA' \arrow[d, "\theta O'"] \\ B \arrow[r, "g"'] & B' \end{tikzcd}$$

Pour cela, nous allons le décomposer :

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[rrr, "Ff"] \arrow[dd, "\theta O"'] \arrow[dr, "FO"] & & & FA' \arrow[dd, "\theta O'"] \arrow[dl, "FO'"'] \\ & FGB \arrow[r, "FGg"] \arrow[dl, "\epsilon B"] & FGB' \arrow[dr, "\epsilon B'"'] & \\ B \arrow[rrr, "g"'] & & & B' \end{tikzcd}$$

Les deux triangles commutent par la proposition 11 ; le trapèze du haut commute aussi car c'est l'image par F du carré

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "O"'] & A' \arrow[d, "O'"] \\ GB \arrow[r, "Gg"'] & GB' \end{tikzcd}$$

que nous avons supposé commutatif en qualifiant (f, Gg) de flèche ; enfin, le trapèze du bas n'est rien d'autre que TN-2 pour ϵ et FGg, et donc il commute.

On a donc défini une transformation de $(\mathcal{A} \downarrow G)$ dans $(F \downarrow \mathcal{B})$ au-dessus de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ qui vérifie F-1.

Il faudrait encore vérifier F-2 et F-3, et que le foncteur ainsi défini est bien un isomorphisme ; mais ces vérifications sont essentiellement techniques et n'apportent pas grand chose de plus. N'hésitez pas à les faire vous-même en cas de doute.

> Dans cette preuve, j'ai beaucoup utilisé le double aspect d'une flèche de catégorie de flèches, qui est aussi un diagramme commutatif. J'ai tenté de distinguer clairement ces deux aspects par un graphisme différent ; mais il est clair que dans la pratique, on prend facilement des raccourcis et on ne fait plus systématiquement la distinction.

8.6 Remarques

La notion d'adjonction est une notion centrale de la théorie des catégories. Il existe donc une littérature nombreuse sur le sujet, avec une avalanche de résultats divers.

Ainsi par exemple, nous avons un peu éludé un problème en parlant de *l'*adjoint d'un foncteur, alors qu'il pourrait en exister plusieurs. Au fait, on peut montrer que s'il existe, un adjoint est unique à isomorphisme près ; ceci doit être compris dans le sens que si G et G' sont tous deux des adjoints à droite (respectivement à gauche) de F, alors il existe un isomorphisme naturel de G à G'.

De même, on peut s'intéresser aux résultats qui assurent l'existence d'un adjoint en fonction de celle d'autres objets comme les limites ou les éléments universels.

Cette notion est suffisamment importante pour que chacun ait tenté d'en trouver une bonne définition... c'est ainsi que [Mac71] en donne 7 caractérisations équivalentes, avec la plupart des preuves (mais pas celle que nous venons de voir).

Notons au passage que Mac Lane propose aussi une discussion intéressante sur la genèse historique de ce concept — et sur les raisons qui ont retardé son émergence. En effet, il a fallu dix ans entre la définition des constructions universelles et celle des adjoints... (pour plus de détails, cf.[Mac71])

> Avant de terminer ce chapitre, je tiens à relever deux subtilités importantes concernant la notion d'adjonction.
>
> Premièrement, il faut être conscient que l'on peut avoir plusieurs paires de foncteurs adjoints entre les mêmes catégories. La métaphore que j'ai proposée pourrait tendre à faire penser le contraire...
>
> Deuxièmement, il peut arriver que les deux catégories en jeu soient confondues : cela a un sens de dire que $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sont adjoints. L'exemple le plus évident est celui du foncteur $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$, qui est son propre adjoint.
>
> J'utiliserai la notion d'adjonction dans le prochain chapitre, précisément dans le cas ne faisant intervenir qu'une catégorie ; cependant les foncteurs impliqués ne seront pas l'identité...

Chapitre 9

Catégories cartésiennes closes

Les catégories cartésiennes closes sont des catégories munies d'une structure supplémentaire qui leur donne une expressivité équivalente au λ-calcul typé.

> Le λ-calcul typé est un système formel conçu pour parler des fonctions de plusieurs variables — et en particulier pour étudier leur calculabilité. Je ne le présenterai pas ici ; si vous voulez en savoir plus, référez-vous à [LS86], qui est entièrement consacré aux rapports entre logique et catégories.

Pour aborder le problème, commençons par regarder ce qui se passe dans **SET**.

9.1 Les fonctions de plusieurs variables

Pour aborder l'étude des fonctions de plusieurs variables, on cherche généralement à se ramener au cas à une variable. Une manière courante d'effectuer cette réduction est de considérer que la fonction est définie sur un produit ; c'est ce que nous avons fait pour les foncteurs.

Il existe cependant une autre méthode : on peut considérer une fonction de plusieurs variables comme une fonction de la première variable dont la valeur est une fonction des autres variables.

Ainsi par exemple la fonction $f(x, y) = xy$ peut être vue comme une surface, c'est à dire comme une fonction

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Ce point de vue est illustré par la figure 9.1.

Mais f peut également être vue comme une famille de droites paramétrées par leur pente x, comme suggéré dans la figure 9.2.

C'est le passage entre ces deux manières de voir la même fonction qui est au centre de la structure d'une catégorie cartésienne close.

9.2 Les catégories cartésiennes closes

Nous allons essayer de traduire ces idées en termes catégoriels. L'approche par les produits nous est déjà connue : dans une catégorie $\mathcal{A}$, on peut considérer les flèches de la forme

$$f : A \times B \to C.$$

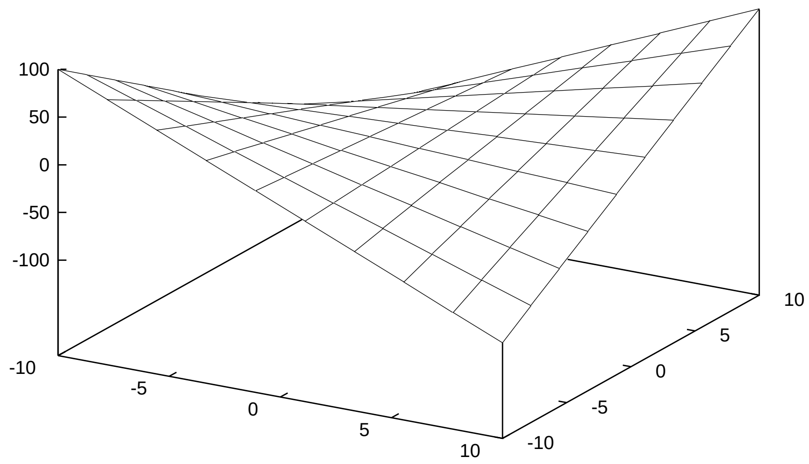


FIG. 9.1: *$f(x, y) = xy$ vue comme une fonction définie sur un produit*

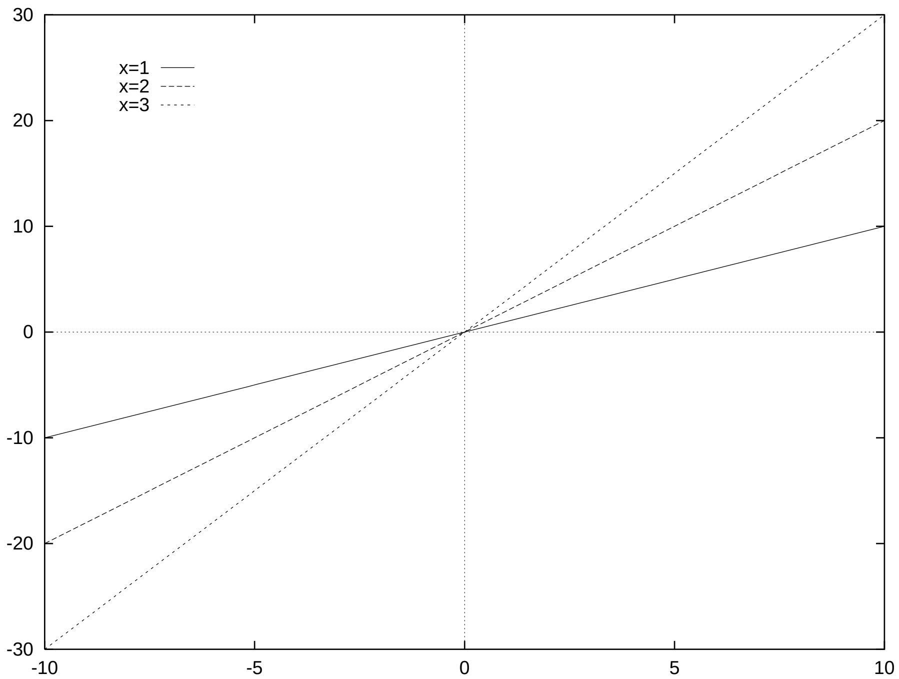


FIG. 9.2: *$f(x, y) = xy$ vue comme une famille paramétrée*

La seconde approche, par contre, fait intervenir des éléments que nous n'avons pas encore vus. En effet, notre catégorie $\mathcal{A}$ devrait contenir des objets qui ressemblent à des ensembles de fonctions. Nous noterons (provisoirement) $[B \to C]$ un tel objet. On s'intéresse donc à des flèches du type

$$f : A \to [B \to C].$$

Si l'on veut que toute "flèche de plusieurs variables" dans notre catégorie possède ces deux aspects, il faut une correspondance entre ces deux types de flèches ; pour cela, fixons l'objet B. On peut alors s'intéresser aux isomorphismes du type

$$(- \times B \downarrow \mathcal{A}) \cong (\mathcal{A} \downarrow [B \to -])$$

qui donnent une correspondance bijective entre des flèches définies sur un produit et des flèches à valeur dans un "espace de fonctions"[1].

> Si vous avez lu attentivement le chapitre précédent, vous devriez voir pointer le nez d'une adjonction...

Habituellement, on note plutôt B^C au lieu de $[B \to C]$[2], et on pose la définition suivante :

Définition 39. Une *catégorie cartésienne close* est une catégorie $\mathcal{A}$ munie d'un objet terminal T et d'un foncteur

$$\times : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

qui envoie toute paire d'objets (A, B) sur un produit $A \times B$ de A et B. De plus, on demande que pour tout objet B le foncteur $- \times B$ admette un adjoint à droite, dont l'image en C est notée B^C.

> L'existence du foncteur $\times$ exige un tout petit peu plus que l'existence des produits correspondant : jusqu'à maintenant, on ne pouvait que dire "*un* produit de A et B", alors que le foncteur $\times$ permet de dire "*le* produit de A et B".
>
> On peut rapprocher cette démarche de celle qui permet de définir la racine carrée d'un nombre : il existe deux nombres dont le carré est 4 (à savoir 2 et -2), mais la fonction $\sqrt{-}$ nous permet de parler de *la* racine carrée de 4.

On peut tirer une conséquence immédiate de cette définition en appliquant la proposition 11 :

Proposition 12. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie cartésienne close. Alors pour toute paire d'objets A, B de $\mathcal{A}$, il existe une flèche*

$$\mathrm{eval} : B^A \times A \to B$$

telle que pour toute flèche $f : C \times A \to B$ il existe une unique flèche

$$\lambda f : C \to B^A$$

telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
 & B^A \times A \arrow[dr, "\mathrm{eval}"] & \\
C \times A \arrow[ur, "\lambda f \times A"] \arrow[rr, "f"'] & & B
\end{tikzcd}$$

1. Le foncteur $- \times B$ envoie un objet A sur $A \times B$ et une flèche f sur $f \times \mathrm{id}_B$
2. Comme le suggère cette notation, un tel objet est appelé *objet exponentiel.*

Les notations introduites dans cette proposition deviendront plus claires après quelques exemples...

9.3 Exemples

SET est une catégorie cartésienne close... En effet, le produit $\times$ est le produit cartésien usuel et pour des ensembles A et B, B^A est l'ensemble des fonctions de A dans B. De plus, eval est évidemment l'évaluation habituelle des fonctions et pour $f(c,a) : C \times A \to B$, λf est la fonction $f(c,-)$ dont la valeur en un c_0 donné est une fonction de A dans B.

Notons que comme pour le produit et la somme, l'exponentielle au sens ci-dessus induit l'exponentielle usuelle sur les entiers au niveau de la cardinalité des ensembles : si A a n éléments et B en a m, alors A^B en a n^m.

... et CAT aussi Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des catégories, alors $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est la catégorie produit définie au paragraphe 4.3, et $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ est la catégorie $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$; eval et λf sont alors très similaires au cas de **SET**.

Ces exemples sont très simples, car les Hom-sets de ces catégories sont eux-mêmes des objets de la catégorie (un ensemble de fonctions est un ensemble, et un ensemble de foncteurs porte une structure de catégorie), et constituent donc des candidats idéaux pour nos "espaces de fonctions". Le cas de **GRF**, par exemple, est plus compliqué : en effet, un ensemble d'homomorphismes de graphes ne porte pas de structure naturelle de graphe. Cependant, il ne faut pas perdre espoir :

GRF est une catégorie cartésienne close Pour des graphes G et H, le produit $G \times H$ est le graphe dont l'ensemble des objets est $(G \times H)_0 = G_0 \times H_0$ et dont une flèche de (g,h) à (g',h') est une paire (a,b) avec $a : g \to g'$ dans G et $b : h \to h'$ dans H.

On vérifie facilement que cette construction nous fournit un produit au sens catégoriel du terme. La situation est un peu plus compliquée pour l'objet exponentiel :

Notons ϵ le graphe composé d'un seul nœud et pas de flèche ; δ celui composé d'une flèche et de deux nœuds distincts (respectivement la source et le but de la flèche) ; $s, t : \epsilon \to \delta$ les homomorphismes qui envoient le seul nœud de ϵ sur la source, respectivement le but, de la seule flèche de δ.

On peut alors définir H^G de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
(H^G)_0 &= \mathrm{Hom}(G \times \epsilon, H) \\
(H^G)_1 &= \mathrm{Hom}(G \times \delta, H) \\
\mathrm{source}_{H^G} &= \mathrm{Hom}(G \times s, H) \\
\mathrm{but}_{H^G} &= \mathrm{Hom}(G \times t, H)
\end{aligned}$$

Il existe d'autres constructions de l'objet exponentiel dans **GRF**. Cependant, aucune ne me paraît vraiment intuitive. Il n'y a donc qu'une solution en cas de doute... effectuer les vérifications !

Une chose peut peut-être vous aider à mieux comprendre : un peu de réflexion montre que $G \times \epsilon$ est essentiellement l'ensemble des nœuds de G, vu comme graphe sans arêtes. En poussant un peu plus loin ce genre de raisonnement, on arrive un peu à "sentir" cette construction...

9.4 Remarques

Le principal intérêt des catégories cartésiennes closes réside dans leur étroit rapport avec le λ-calcul. En effet, étant donnée une catégorie cartésienne close, il est possible de définir son *langage interne*, qui est un langage formel vérifiant tous les axiomes du λ-calcul.

Inversement, chaque λ-calcul correspond à une catégorie, qui se trouve être cartésienne close.

On peut trouver le détail de ces constructions dans [BW90], ainsi que quelques résultats de base dans ce contexte.

Pour une discussion complète sur la question, reportez-vous à [LS86] ; après une brève introduction à la théorie des catégories et au λ-calcul, cet ouvrage propose une étude détaillée des liens entre ces deux sujets. On apprend ainsi que si l'on considère le langage interne d'une catégorie, puis la catégorie correspondant à ce langage, on obtient une catégorie équivalente à celle de départ. De même, l'aller-et-retour dans l'autre sens donne lieu à un langage équivalent à celui de départ.

Relevons de plus que cet ouvrage comporte de nombreuses notes historiques sur la genèse des différentes théories impliquées, ce qui est suffisamment rare pour être salué !

Chapitre 10

Topoi

Un topos[1] est une catégorie cartésienne close dans laquelle on se donne la possibilité de parler de sous-objet. En effet, la définition en terme de classes d'équivalence de monomorphismes (cf. paragraphe 2.4) est tout à fait externe à la catégorie. Nous allons voir dans quelles circonstances on peut internaliser cette notion, c'est à dire la représenter par des éléments internes — objets et flèches — à la catégorie.

La théorie des topoi est un vaste sujet. Je ne vais en donner ici que les rudiments ; pour plus de détails, je vous donne quelques références à la fin de ce chapitre.

Étant donnée une catégorie $\mathcal{C}$, l'idée est de définir un foncteur

$$\mathrm{Sub} : \mathcal{C} \to \mathbf{SET}$$

qui envoie chaque objet de $\mathcal{C}$ sur l'ensemble de ses sous-objets. Un topos est alors une catégorie dans laquelle ce foncteur est représentable (cf. paragraphe 7.1).

Le problème est de savoir quelle doit être l'action de Sub sur les flèches de $\mathcal{C}$. Pour y voir plus clair, étudions ce qui se passe dans **SET**.

10.1 Les sous-objets dans SET

Soient A et B des ensembles et $f : A \to B$ une fonction. Nous cherchons à définir le foncteur de sous-objet sur f. Pour que tout marche bien par la suite, nous allons définir Sub comme un foncteur *contravariant*. On doit donc avoir

$$\mathrm{Sub}(f) : \mathrm{Sub}(B) \to \mathrm{Sub}(A).$$

Une manière canonique d'obtenir cela est de prendre l'*image réciproque* : pour $B_0 \subseteq B$, on pose

$$\mathrm{Sub}(f)(B_0) = f^{-1}(B_0) = \{a \in A | f(a) \in B_0\}.$$

On vérifie facilement que cette définition donne bien un foncteur $\mathbf{SET}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{SET}$. On a donc obtenu ce que l'on voulait.

Cependant, il est difficile de trouver une généralisation directe de ce point de vue pour d'autres catégories. C'est pourquoi il est intéressant de constater la chose suivante :

---

1. Le pluriel de *topos* est *topoi*, prononcé "topoï".

Proposition 13. *Soient A,B des ensembles et $f : A \to B$ une fonction. Soit $B_0 \subseteq B$. Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B_0) \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook, "i"'] & B_0 \arrow[d, hook, "j"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

est un diagramme de pullback si i et j sont les inclusions canoniques et h la restriction de f à $f^{-1}(B_0)$.

Nous pouvons maintenant passer au cas général.

10.2 Le foncteur de sous-objet

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie contenant tous ses pullbacks.
On vérifie facilement que si i est un monomorphisme dans le diagramme de pullback

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & B \arrow[d, hook, "i"] \\ C \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

alors j est également un monomorphisme. Mieux : si on remplace i par un monomorphisme i' représentant le même sous-objet, son pullback j' appartient au même sous-objet que j. On peut donc sans ambiguïté parler du *pullback d'un sous-objet le long d'une flèche* : dans le cas ci-dessus, le pullback du sous-objet représenté par i le long de f est le sous-objet représenté par j.
On peut maintenant poser la définition suivante :

Définition 40. Le *foncteur de sous-objet* est le foncteur

$$\mathrm{Sub} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{SET}$$

qui envoie un objet C de $\mathcal{C}$ sur l'ensemble de ses sous-objets et une flèche $f : C \to D$ de $\mathcal{C}$ sur la fonction $\mathrm{Sub}(f) : \mathrm{Sub}(D) \to \mathrm{Sub}(C)$ qui envoie chaque sous-objet sur son pullback le long de f.

Je vous laisse le soin de vérifier que Sub ainsi défini est bien un foncteur.

10.3 Topoi

Nous avons tous les ingrédients nécessaires pour la définition suivante :

Définition 41. Un *topos* est une catégorie $\mathcal{T}$ vérifiant les axiomes suivants :

Top-1: $\mathcal{T}$ est cartésienne close
Top-2: $\mathcal{T}$ contient tous ses pullbacks
Top-3: Le foncteur de sous-objet $\mathrm{Sub} : \mathcal{T} \to \mathbf{SET}$ est représentable

> En d'autres termes, un topos est une catégorie cartésienne close (Top-1) où l'on peut définir le foncteur de sous-objet (Top-2) et où celui-ci est représentable (Top-3). C'est donc une catégorie cartésienne close dans laquelle on peut internaliser la notion de sous-objet.

Nous savons (cf. 7.3) qu'un foncteur est représentable si et seulement s'il admet un élément universel. On peut donc appliquer la proposition 9 (page 65) au foncteur Sub : Un élément universel de Sub est un objet Ω de $\mathcal{T}$ et un sous-objet $\Omega_0 \xhookrightarrow{\text{vrai}} \Omega$ tel que pour tout objet A et tout sous-objet $A_0 \hookrightarrow A$ il existe une unique flèche $\chi : A \to \Omega$ telle qu'il y a un pullback

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Omega_0 \arrow[d, hook, "\text{vrai}"] \\ A \arrow[r, "\chi"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

L'isomorphisme naturel

$$\Theta : \mathrm{Sub}(-) \to \mathrm{Hom}(-, \Omega)$$

exigé par Top-3 envoie donc A_0 sur χ.

On peut préciser cette situation :

Proposition 14. *L'élément universel* Ω_0 *de* Sub *est l'objet terminal de* $\mathcal{T}$*.*

Preuve. Soit A un objet de $\mathcal{T}$. On peut voir $A \xhookrightarrow{\text{id}} A$ comme un sous-objet de A. Dans ce cas, on a un pullback

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, hook, "\text{id}"'] & \Omega_0 \arrow[d, hook, "\text{vrai}"] \\ A \arrow[r, "\chi"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

qui nous fournit une flèche $A \to \Omega_0$.

Supposons maintenant que f et g soient deux flèches $A \to \Omega_0$; par composition avec vrai, on obtient deux flèches $A \to \Omega$. Or on vérifie facilement que les deux carrés

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\text{id}"'] & \Omega_0 \arrow[d, hook, "\text{vrai}"] \\ A \arrow[r, "\text{vrai} \circ f"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "\text{id}"'] & \Omega_0 \arrow[d, hook, "\text{vrai}"] \\ A \arrow[r, "\text{vrai} \circ g"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

sont des pullbacks. Donc ces deux flèches induisent le même sous-objet A de A. Comme $\mathrm{Sub}(-)$ et $\mathrm{Hom}(-, \Omega)$ sont isomorphes, on peut en conclure que

$$\text{vrai} \circ f = \text{vrai} \circ g.$$

Mais comme vrai est un monomorphisme, cela implique que $f = g$.

On a donc montré que pour tout objet A il existe une et une seule flèche $A \to \Omega_0$. $\square$

En vertu de cette proposition, on note généralement 1 au lieu de Ω_0. De plus, l'objet Ω est généralement appelé *classificateur de sous-objet*. La flèche χ est appelée *fonction caractéristique* du sous-objet.

Nous verrons mieux le rôle de ces différents éléments en considérant quelques exemples.

10.4 Exemples

Comme l'intuition de la construction d'un topos nous vient de la catégorie des ensembles, commençons par elle :

SET est un topos Nous savons déjà que **SET** est une catégorie cartésienne close et qu'elle contient toutes ses limites (donc en particulier ses pullback).

Un classificateur de sous-objet dans **SET** est un ensemble à deux éléments, disons $\{0, 1\}$; on peut alors prendre pour l'objet terminal 1 le sous-ensemble $\{1\}$ muni de son injection vrai.

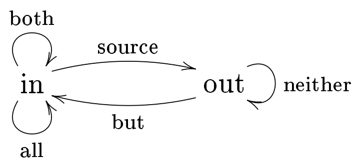
Dans ce cas, la fonction caractéristique de $A_0 \subseteq A$ est la fonction qui vaut 1 sur A_0 et 0 en dehors.

Cette construction vous est probablement familière. Ce n'est pas un hasard si on trouve cela pour **SET**, car si l'on y réfléchit, on a tout fait pour...

Prenons encore un autre exemple :

GRF est un topos On sait que **GRF** est une catégorie cartésienne close. On peut de plus montrer qu'elle contient tous ses pullbacks — ce que nous ne ferons pas ici.

Le classificateur de sous-objet peut être décrit comme un graphe Ω ayant l'allure suivante :



Le graphe terminal est celui composé d'un nœud et d'un flèche. L'homomorphisme vrai envoie ce nœud sur in et cette flèche sur all.

Étant donné un sous-graphe G_0 d'un graphe G, on définit ainsi la fonction caractéristique $\chi : G \to \Omega$:

- Un nœud de G est envoyé sur in ou out suivant s'il est dans G_0 ou non ;
- Les flèches de G qui sont dans G_0 sont envoyées sur all ;
- Pour une flèche f qui n'est pas dans G_0, il y a plusieurs possibilités :
  - Si la source de f est dans G_0 mais pas son but, on pose $\chi(f) = \text{source}$;
  - Si le but de f est dans G_0 mais pas sa source, on pose $\chi(f) = \text{but}$;
  - Si la source et le but de f sont dans G_0, on pose $\chi(f) = \text{both}$.

10.5 Quelques résultats

Je vous donne ici quelques résultats élémentaires de la théorie des topoi. Cela permet de voir qu'un topos est une "gentille" catégorie, où "tout se passe bien".

Proposition 15. *Un topos contient toutes ses limites.*

Ceci découle du résultat tout à fait général qu'une catégorie qui contient un objet terminal et tous ses pullbacks contient toutes ses limites. Dans certains textes, Top-2 est remplacé par l'exigence équivalente que $\mathcal{T}$ contienne toutes ses limites.

Proposition 16. *Un topos contient toutes ses colimites.*

Là, par contre, la preuve est beaucoup plus difficile...

Proposition 17. *Dans un topos, tout monomorphisme est un égalisateur et tout épimorphisme est un coégalisateur.*

Proposition 18. *Dans un topos, une flèche qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme est un isomorphisme.*

On retrouve donc ici un résultat classique de **SET**, que nous avons montré être faux dans une catégorie quelconque (cf. page 25).

Dans un autre ordre d'idée, on a :

Proposition 19. *Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ des Topoi. Alors la catégorie $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ est un topos.*

On pourrait continuer longtemps ; je vais cependant m'arrêter ici. Pour en savoir plus dans un domaine particulier, référez-vous aux ouvrages que je cite dans le prochain paragraphe.

10.6 Ouvertures

La théorie des topoi rencontre un grand succès en mathématiques et dans les branches connexes, d'où une abondante littérature plus ou moins abordable. Ces quelques remarques sont là pour vous orienter vers tel ou tel aspect qui vous intéresserait plus particulièrement.

Cette présentation est informelle et ne vise qu'à vous indiquer des pistes pour d'éventuelles lectures ultérieures.

Les topoi et la théorie des ensembles Ce chapitre vous a convaincu, je l'espère, qu'un topos ressemble beaucoup à la catégorie des ensembles. Cependant, une différence fondamentale réside dans le fait que dans un topos, un sous-objet n'est pas forcément complémenté ; je veux dire par là que si A_0 est un sous-objet de A, il n'existe pas forcément de sous-objet A_1 de A tel que A est la "réunion disjointe" (le coproduit) de A_0 et A_1.

Vous trouverez dans [BW90] une discussion sur les avantages que cette propriété apporte à la modélisation en informatique.

Les topoi et la logique Comme les catégories cartésiennes closes, les topoi ont un lien direct avec la logique. Je ne m'aventurerai pas plus dans cette voie que je connais mal. Pour en savoir plus, reportez-vous à [LS86].

Les topoi et la topologie Le nom “topos” suggère que cette notion a un contenu géométrique. C’est en partie vrai, même si cette géométrie est bien loin de celle d’Euclide...

Cet aspect des topoi est étroitement lié à un autre type d’objet mathématique, les *faisceaux*. Pour une introduction à ce sujet, vous pouvez consulter [Vic95] ou [Vic96][2].

Toutes ces facettes de la théorie des topoi sont aussi abordés dans [McL92], qui me semble constituer un bon ouvrage de synthèse. Enfin, le lecteur motivé pourra s’attaquer à [Joh77], qui constitue la référence standard dans ce domaine.

Le mot de la fin... Ce dernier titre ([Joh77]) est d’une lecture ardue même pour l’étudiant en mathématiques que je suis. Il est cependant très complet, les sujet abordés englobant tous les aspects cités ci-dessus, et même d’autres :

> Finally, I have to state my position on the most controversial question in the whole topos theory : how to spell the plural of topos. The reader will already have observed that I use the English plural ; I do so because (in its mathematical sense) the word topos is not a direct derivative of its Greek root, but a back-formation from topology. I have nothing further to say on the matter, except to ask those toposophers who persist in talking about topoi whether, when they go out for a ramble on a cold day, they carry supplies of hot tea with them in thermoi[3].

2. Notez que malgré leur titre, ces deux textes ne me semblent pas d’une lecture très facile pour des non mathématiciens.

3. Je ne crois pourtant pas qu’il y ait d’autre usage en français que celui que j’ai adopté.

Deuxième partie

Les systèmes évolutifs avec mémoire

Chapitre 1

Introduction

La deuxième partie de ce travail sera consacré à la théorie des *systèmes évolutifs avec mémoire*[1] de A. Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch. Vous êtes en droit de me demander ce qu'est cette théorie et pour quelle raison elle figure dans ce travail. Commençons par la première question.

La théorie des SEM propose un modèle général pour des systèmes complexes auto-organisés tels que certains systèmes biologiques ou sociologiques.

À la base, cette théorie a été conçue pour modéliser les systèmes neuronaux et étudier les "processus cognitifs d'ordre supérieur (émergence de sémantique, conscience)" ([EV93]) qui peuvent s'y dérouler. Cependant, il peut être vu de manière plus générale comme une tentative de formalisation des phénomènes d'*émergence*. C'est pourquoi son champ d'application dépasse finalement la biologie pour recouvrir de nombreux domaines.

Le formalisme utilisé par la théorie des SEM est entièrement catégoriel. Ceci explique en partie pourquoi j'en parle dans ce travail. Cependant, cette raison ne saurait suffire, car de nombreux autres modèles utilisent également la théorie des catégories. Outre les applications nombreuses en informatique théorique[2], on pourrait citer les travaux de P. Boldini en psychologie ([Bol94, Bol95]), qui prolongent ceux de H. Henriquès ([Hen90]) ; ceux de R. Rosen en biologie théorique ([Ros91]) ; et ceux de J. Sallantin, quelque part entre épistémologie et intelligence artificielle ([Sal97]).

Pour cette deuxième partie, je voulais présenter une théorie dont le formalisme soit entièrement catégoriel ; qui utilise certains outils catégoriels complexes (comme par exemple les catégories de flèches) ; qui reste cependant — à peu de chose près — dans le cadre des concepts que j'ai présenté dans la première partie ; et qui, de plus, fournisse des illustrations parlantes de ces concepts, pour les rendre plus intuitifs. Des différentes théories que j'ai citées, c'est celle des SEM qui répond le mieux à ces diverses exigences.

Enfin cette théorie semble proposer une alternative à l'omniprésente théorie des systèmes dynamiques pour étudier les structures émergeant de la dynamique d'un système. Or J.-P. Müller, codirecteur de mémoire, est à la recherche d'une telle alternative...

Maintenant que vous savez ce qu'est la théorie des SEM et pourquoi j'en parle, nous allons pouvoir commencer son étude proprement dite. Je vais structurer la présentation en sept courts chapitres qui présentent chacun une idée forte du modèle. Avant d'entrer dans le vif du sujet,

1. Par la suite, j'abrégerai systématiquement ces trois mots en *SEM*
2. On peut en trouver quelques rudiments dans [BW90]

je désire encore faire deux remarques d'ordre typographique :

- Dans cette deuxième partie, formel et informel seront beaucoup plus imbriqués que jusqu'à maintenant. Je vais donc renoncer aux petites lettres qui signalaient mes remarques personnelles, pour éviter des mises en pages trop chargées...
- À partir de maintenant, les définitions que je donnerai vont changer de nature : jusque là, il s'agissait de définitions mathématiques, largement reconnues dans la littérature et les usages. Celles qui suivent, par contre, sont spécifique à la théorie des SEM et n'ont pas la même généralité. C'est pourquoi elles seront précédées de l'abréviation *SEM*, au lieu du mot *définition* que j'ai utilisé jusqu'à présent.

Mes sources pour ce qui va suivre sont essentiellement [EV91] pour la ligne générale, [EV92] pour les détails mathématiques et [EV93] pour les questions concernant la temporalité. Les autres articles cités dans la bibliographie ne m'ont servi que de références ponctuelles pour des éléments manquant dans les trois premiers.

Chapitre 2

Systèmes hiérarchiques

La notion de système hiérarchique permet de représenter à l'intérieur d'une catégorie les rapports qui s'établissent entre divers éléments en interaction et dont la globalité forme une entité d'ordre supérieur. Pour bien comprendre ce qui se passe, nous allons commencer par revisiter la notion de (co-)limite.

2.1 Limites et colimites revisitées

Nous avons déjà évoqué le fait que les flèches d'une catégorie peuvent modéliser les communication — ou échanges d'informations — entre les différents objets. Une flèche $f : A \to B$ peut donc être vue comme un *comportement* de A envers B ou comme un *aspect* de A pour B. On peut alors reformuler les notions de limite et colimite dans ce contexte. Nous commencerons par les colimites.

Colimites Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et D un diagramme de $\mathcal{C}$ admettant l'objet C pour colimite. On peut reformuler la définition de la colimite de la manière suivante : pour tout objet O de $\mathcal{C}$, on a une bijection entre les comportements globaux du diagramme D envers O et les comportements de C envers O. On peut donc considérer que la colimite C représente le *comportement global* de D. Ceci permet de considérer C comme un élément complexe formé des D_i mais non réductible à la simple réunion de ceux-ci (à moins que D ne soit discret).

On peut aussi interpréter C comme un élément qui distille la même information que le diagramme D.

Limites Supposons maintenant que la limite L de D existe. On a donc la propriété suivante : pour tout objet O de $\mathcal{C}$, on a une bijection entre les comportements cohérents de O envers le diagramme D et les comportements de O envers L.

Ce cas est un petit peu plus difficile à interpréter que le précédent. Pour ce faire, nous allons utiliser une métaphore : supposons que les D_i soient les différents éléments d'un organe moteur, par exemple les muscles d'une main, et que O soit un centre de contrôle utilisant cette main. Un diagramme D peut représenter une action cohérente impliquant de nombreux muscles, comme par exemple se saisir d'un objet. Dans ce cas, la limite L permet de représenter cette action complexe en un seul objet de $\mathcal{C}$. Notons que selon les cas, cette construction peut être faite par O, qui veut envoyer un seul ordre pour une action complexe, ou par nous, qui désirons modéliser les choses de manière plus synthétique.

Dans la théorie des SEM, les colimites sont beaucoup plus utilisées que les limites. Peut-être est-ce dû à la structure profonde du système neuronal qui a servi de base pour cette modélisation. Peut-être aussi que cela vient du choix des phénomènes que les auteurs désiraient modéliser. Quoi qu'il en soit, il est important de se rappeler des deux interprétations que j'ai proposées pour les colimites, car je crois qu'elle constituent la clef pour la compréhension de la théorie qui va suivre.

Notons que ces interprétations en terme d'information, d'action, etc. ne constituent qu'un métaniveau par rapport à la théorie. D'un point de vue formel, il n'est pas nécessaire, dans les systèmes que nous étudierons, de distinguer les capteurs des effecteurs. Ceci ne sert "que" à mieux comprendre ce que nous faisons.

2.2 Systèmes hiérarchiques

Nous pouvons maintenant formuler la première définition de la théorie des SEM :

SEM 1. Un *système hiérarchique* est une catégorie dont les objets sont répartis sur un nombre fini de *niveaux*, numérotés $0, 1, 2, ...$, de sorte que chaque objet de niveau $n \geq 1$ soit la colimite d'au moins un diagramme contenu dans le niveau $n - 1$.

Un système hiérarchique est donc une catégorie qui permet de représenter des objets complexes formés à partir d'une organisation d'un niveau de complexité inférieur.

Du point de vue technique, deux remarques s'imposent :

- Premièrement, chaque niveau d'un système hiérarchique est lui-même une catégorie. On peut donc s'intéresser à un niveau isolé et l'aborder avec les outils habituels de la théorie des catégories.

- Deuxièmement, si les objets sont répartis en niveaux, cela ne veut pas dire que les flèches le sont aussi ; au contraire, l'exigence que chaque objet soit colimite d'un diagramme de niveau inférieur signifie qu'il y a forcément des flèches inter-niveaux. En effet, il y a au moins les flèches formant les cocônes ainsi que les compositions de celles-ci.

Notons encore que selon ce formalisme, la complexité d'un objet dépend du point de vue que l'on a sur lui : un objet du niveau n peut être vu comme un objet complexe formé d'éléments du niveau $n-1$ ou comme un constituant simple d'un objet du niveau $n+1$. Ainsi une cellule, par exemple, peut être considérée comme un objet complexe incluant une organisation interne évoluée ; mais cette cellule peut aussi nous intéresser en tant qu'unité constituante d'un tissus.

Dans leur modèle du système neuronal, Ehresmann et Vanbremeersch prennent pour niveau 1 les neurones, et construisent les niveaux supérieurs à partir d'objets abstraits représentant des opérations mentales de plus en plus complexes. Il est à noter cependant que dans certains cas, il y a déjà au niveau des neurones un élément qui se comporte comme la colimite d'un diagramme de neurones ("neurone-pilote"). Il faut donc être conscient que l'exigence que tout objet du niveau n soit colimite d'un diagramme du niveau $n - 1$ n'implique pas que toute colimite d'un tel diagramme se trouve au niveau n !

Chapitre 3

Systèmes évolutifs

Un système hiérarchique, aussi intéressant qu'il soit, est essentiellement un objet statique. La notion de système évolutif nous permettra d'introduire une dimension dynamique dans notre modèle.

3.1 Systèmes évolutifs

Pour modéliser un système en évolution avec la théorie des catégories, nous allons simplement représenter l'état du système en chaque instant par une catégorie. Plus précisément, nous allons poser la définition suivante :

SEM 2. Un *système évolutif* se compose d'un ordre total T, appelé *échelle de temps* du système, et d'un foncteur $K : T \to \mathbf{CAT}$. L'image par K d'un objet t de T est souvent notée K_t et est appelée *état du système en t.*

Bien entendu, dans cette définition, T est considéré comme une catégorie. Le foncteur K nous donne donc pour chaque $t \leq t'$ un foncteur *transition* de K_t dans $K_{t'}$.

Quelques remarques s'imposent :

- Par commodité, on suppose que T est discret, c'est à dire que l'on peut parler de "l'instant suivant". Selon [EV91], cela ne représente pas une réelle limitation de la théorie. On peut par contre sans problème prendre pour T un ensemble infini.
- L'exigence que T soit un ordre total ne me semble pas essentielle pour la majeure partie de ce qui suit. On peut donc, si on le désire, prendre pour T un ordre partiel ou une structure plus générale et remplacer systématiquement "l'instant suivant" par "les instants successeurs". Ceci permet par exemple de modéliser des alternatives.
- Comme K est un foncteur, les transitions d'états ont une certaine cohérence ; en effet, si l'on considère trois instants $t \leq t' \leq t''$, la composition des transitions $K_t \to K_{t'}$ et $K_{t'} \to K_{t''}$ doit donner la transition $K_t \to K_{t''}$. Ceci nous assure que le système ne dépend pas trop de l'échelle de temps choisie.

Il est important de noter que pour l'instant, seule la succession des instants nous intéresse. Nous n'avons pas de notion de durée. Celle-ci, ainsi que d'autres indicateurs temporels utiles, sera introduite au chapitre 5.

Nous allons maintenant voir comment nous pouvons combiner les deux notions que nous avons définies.

3.2 Systèmes évolutifs hiérarchiques

SEM 3. Un *système évolutif hiérarchique* est un système évolutif dans lequel chaque catégorie K_t est hiérarchique.

Notation. Par la suite, nous noterons SEH pour *système évolutif hiérarchique.*

Cette définition permet de mieux cerner ce que nous voulons faire : nous allons tenter d'étudier comment un SEH peut évoluer dans le temps en augmentant progressivement le nombre de niveaux hiérarchiques des catégories représentant les états du système. Autrement dit, le but est de comprendre comment un système peut construire des objets abstraits de plus en plus complexes qui pourraient bien — selon les auteurs de la théorie — culminer dans des phénomènes tels que la *conscience* ou le *langage*...

Avant d'en arriver là, nous avons encore bien à faire. Un des problèmes qui se posent maintenant est le suivant : si l'on suppose le système ouvert, en communication avec son environnement, il peut arriver que des éléments apparaissent ou disparaissent. Voyons comment nous pouvons représenter ces situations :

Apparitions Ce point-là ne pose pas de problème. Si le foncteur transition entre deux états successifs n'est pas surjectif sur les objets, cela signifie que de nouveaux objets sont apparus. Ceux-ci se reconnaissent au fait qu'ils ne sont pas dans l'image du foncteur considéré.

Disparitions Ce cas est plus problématique. En effet, un foncteur doit attribuer une image à *chaque* objet de son domaine. Comment dès lors exprimer qu'un objet a disparu ?

La solution retenue par Ehresmann et Vanbremeersch est d'introduire dans les catégories un objet "poubelle" sur lequel seront envoyés tous les objets disparus. Encore faut-il s'assurer que toute l'information contenue dans ces objets disparaît bien avec eux. Pour obtenir cela, nous prendrons comme "poubelle" l'objet initial de la catégorie, que nous noterons 0. En effet, un tel objet possède exactement une flèche vers tout autre objet. On peut donc considérer que, comme il diffuse la même information à tout le monde, c'est à peu près comme s'il ne diffusait aucune information.

Pour renforcer cette intuition, on peut se référer à la catégorie **SET** dont l'objet initial $\emptyset$ contient en effet bien peu d'information...

Ainsi nous ferons la supposition suivante :

SEM 4. Chaque état K_t d'un SEH contient un objet initial 0, et celui-ci est préservé par les transitions.

3.3 Remarques

La définition de système évolutif que je présente ici n'est au fait pas exactement celle de Ehresmann et Vanbremeersch. Ceux-ci se placent dans un contexte plus général, celui des *fibrations*. Cependant, les fibrations qu'ils considèrent sont suffisamment spécialisées[1] pour être équivalentes à des foncteurs à valeurs dans **CAT**.

Il peut cependant être intéressant de s'attarder quelques instants sur ce concept. Dans l'approche par les fibrations, on considère au début l'ensemble des catégories K_t amalgamées

1. D'après [EV92], un système évolutif est une *fibration scindée* au-dessus d'un ordre total T.

sous la forme d'une grande catégorie K. Ce n'est que dans un deuxième temps que l'on "découpe" ce K en plusieurs catégories "successives", un peu comme on découpe ensuite les états en niveaux de complexité.

Cette approche comporte l'avantage de considérer l'ensemble de l'histoire du système comme une seule entité, rendant plus facile l'étude du processus dans sa totalité[2].

De plus, les fibrations utilisées étant un cas particulier d'une situation plus générale, cela peut suggérer des voies pour étendre la théorie si cela s'avérait nécessaire.

Pour plus de précisions sur la théorie des fibrations, vous pouvez vous référer à [BW90], qui y consacre tout un chapitre.

2. En fait, dans notre cas, on a aussi un tel objet sous la forme du foncteur $K : T \to \mathbf{CAT}$. Cependant, cet objet est plus difficile à manipuler qu'une simple catégorie.

Chapitre 4

Centres de régulation et paysages

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré un point de vue externe et omniscient sur le système. Cependant, il est rare qu'un tel point de vue soit accessible dans la réalité. Nous allons donc nous intéresser aux points de vue que *le système* — ou des parties de celui-ci — peut avoir sur *lui-même.*

4.1 Centres de régulations

Dans [EV91], Ehresmann et Vanbremeersch motivent ainsi l'introduction de ce concept :

> Dans des système autonomes tels que les systèmes biologiques ou sociologiques, l'évolution est sous la dépendance d'une hiérarchie d'organes de régulation internes qui analysent les contraintes internes et externes, et cherchent à modifier en conséquence l'état du système et son rapport à l'environnement (ce contrôle devant être entendu en un sens fonctionnel et non volitif !)

Pour modéliser ceci, nous allons introduire un nouvel outil :

SEM 5. Un *sous-système évolutif* d'un système évolutif S est un système évolutif S' défini sur la même échelle de temps T que S et tel que chaque état K'_t de S' soit une sous-catégorie de l'état correspondant K_t de S.

On peut maintenant formuler la définition suivante :

SEM 6. Soit S un système évolutif. Un *centre de régulation* de S est un sous-système évolutif C de S. Les objets de C sont appelés *agents* du centre de régulation C.

Notation. Nous allons beaucoup utiliser ce concept par la suite ; nous allons donc la plupart du temps l'abréger en CR.

Notre but pour la suite va donc être d'étudier comment le ou les CR d'un SEH peuvent influencer l'évolution du SEH de manière à obtenir un comportement complexe et cohérent de l'ensemble du système.

Dans ce contexte, un des premiers problèmes à apparaître est celui de la représentation des connaissances d'un CR. En effet, celui-ci n'a en général accès qu'à une partie de l'information qui circule dans le système ; le paragraphe suivant propose une solution (partielle !) à ce problème.

4.2 Paysages

L'idée est que l'information accessible pour un agent A est exactement représentée par les flèches de but A. Nous appellerons *champ* de l'agent A au temps t l'information accessible pour A au temps t ; formellement, on pose

SEM 7. Soient S un système évolutif, C un CR et A un agent de C. Nous appellerons *champ de A en t* la catégorie de flèches $(K_t \downarrow A)$.

Les exemples proposés à la fin du chapitre 4 de la première partie devraient vous permettre de comprendre le pourquoi de cette définition. Notons que la flèche id_A est toujours un objet du champ de A ; Ehresmann et Vanbremeersch l'appellent le "Soi" de A. Il est caractérisé par le fait que c'est un objet terminal du champ de A.

En général, le fait qu'un CR soit formé de plusieurs agents reliés entre eux permet d'avoir accès à plus d'information que celle de chacun des agents isolément. On serait donc intéressé à une catégorie qui contient la même information que l'ensemble des champs des agents. Or c'est exactement le sens que nous avons donné à la colimite dans le chapitre 2. Mais pour parler de colimite, il faut avoir un diagramme — ou un foncteur.

Soient A et A' deux agents du même CR. Il est clair que toute flèche $A \to A'$ détermine (par composition) un foncteur du champ de A dans celui de A'. On a donc un foncteur $C_t \to \mathbf{CAT}$ qui associe à chaque agent de C son champ au temps t. Nous l'appellerons le *foncteur des champs de C_t*. On peut maintenant poser la définition qui nous intéresse :

SEM 8. Soient S un système évolutif et C un CR. Le *paysage de C en t* est la colimite du foncteur des champs de C_t vu comme diagramme dans $\mathbf{CAT}$.

Chacun des champs de C_t est muni d'un foncteur vers K_t — la projection au sens où nous l'avons définie pour les catégories de flèches. Par construction, ces foncteurs sont "compatibles" avec les échanges d'information entre agents, et donc à cette famille de foncteurs correspond un foncteur du paysage de C en t dans K_t (car le paysage est la colimite). Nous appellerons ce foncteur le *foncteur distorsion*. Il permet d'étudier la différence entre la connaissance du CR sur le système et l'état du système lui-même.

Intuitivement, le paysage est formé par la réunion des différents champs qui le composent, où l'on identifie les objets qui représentent la même information perçue par des agents différents.

A titre d'exemple, imaginons qu'un élément du système soit "omniscient", c'est à dire qu'il ait accès à toute l'information du système. Nous représenterons un tel objet par un objet terminal T de K_t. Alors on montre facilement que le paysage du CR composé de T est isomorphe à l'état du système K_t.

Nous avons maintenant une bonne représentation de l'information accessible au CR en un instant donné. Cependant, dans la plupart des systèmes "réels", l'information met un certain temps à circuler entre les agents, et ce phénomène rend certains aspects inobservables au niveau du CR, car ils ne "durent pas assez longtemps".

Ainsi, avant de pouvoir considérer l'information réellement utilisable par le CR, nous devons encore étudier de plus près le rôle du temps dans notre modèle.

Chapitre 5

Le temps

Jusqu'à maintenant, nous n'avons considéré le temps que comme une manière d'*ordonner* les événements d'un système évolutif. Nous voulons maintenant prendre en compte les *durées* des processus pour obtenir un modèle un peu plus riche. Pour ce faire, nous supposerons dès maintenant que les échelles de temps de nos systèmes sont des sous-ordres de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On réintroduit ainsi de manière explicite la *durée* des étapes de nos systèmes[1].

5.1 Stabilité, renouvellement et persistance

Une des premières questions que l'on peut se poser en parlant de durée est celle de la "longévité" des éléments de notre système. Nous allons introduire trois mesures qui permettent d'étudier cette question de plus près.

Pour ce faire, nous allons nous placer au temps t d'un système évolutif S, et y considérer un élément B de niveau n, colimite d'un diagramme D de niveau $n-1$.

SEM 9. L'*empan de persistance* de B en t est la plus longue période π durant laquelle les transformés[2] de D admettent comme colimite les transformés de B.

L'empan de persistance mesure donc la durée pendant laquelle la composition de B reste *inchangée*. Cependant, il peut arriver que les composantes de B changent sans que cela ne change fondamentalement l'identité de B lui-même. Ceci nous pousse à introduire la notion suivante :

SEM 10. L'*empan de stabilité* de B en t est la plus longue période τ durant laquelle il existe des diagrammes successifs D_i, isomorphes à D, admettant B pour colimite.

L'empan de stabilité mesure donc la période durant laquelle l'organisation de B reste la même. Notons que les composantes peuvent changer durant cette période, si elles sont remplacées par d'autres qui remplissent le même rôle. Pour étudier ces remplacements, on peut introduire la notion suivante :

SEM 11. L'*empan de renouvellement* de B en t est la plus courte durée ρ telle qu'il existe au temps $t+\rho$ un diagramme D' de colimite B contenant des composantes qui n'existaient pas en t.

1. Cette manière de procéder n'est pas la seule possible ; voyez les remarques à la fin de ce chapitre.
2. Les transformés d'un élément en sont les images par les foncteurs transitions

Ce troisième indicateur meure donc la vitesse à laquelle les composantes de B se renouvellent.

5.2 Le temps d'un CR

La notion de durée telle que nous l'avons introduite est une durée externe au système, comparable au *temps absolu* de la physique newtonienne. Cependant, les composantes du système et particulièrement les CR peuvent avoir une "notion du temps" très différente de ces durées absolues. Nous verrons par la suite que les CR on un comportement plus ou moins cyclique, qui définit quelque chose comme l'"horloge interne" du CR. Or cette horloge est fortement influencée par la rapidité de communication des agents entre eux et avec l'environnement. Nous allons donc introduire la notion suivante :

SEM 12. A tout CR C d'un SEH doit être associé une durée $d(C)$, appelée *délai de propagation* de C, qui représente la durée moyenne d'un échange d'information entre deux de ses agents.

En pratique, ce nombre n'intervient que par son ordre de grandeur, et c'est pourquoi on peut se contenter de cette définition un peu floue.

On peut supposer que ce délai augmente avec le niveau de complexité des agents du CR concerné. Ainsi par exemple, la durée d'une interaction entre deux molécules est négligeable par rapport au temps nécessaire à la transmission d'un message entre deux cellules.

Pour qu'un CR puisse construire son paysage, il est évident que ses agents doivent échanger des informations. Qui plus est, il est souvent nécessaire que l'information puisse faire un *aller-et-retour* entre les agents pour pouvoir effectuer des comparaisons de leurs connaissances. Il est donc naturel de supposer que la construction d'un paysage prend un temps au moins égal à $2d(C)$. Nous poserons donc la définition suivante :

SEM 13. Soit C un CR d'un SEH ; nous appellerons *présent actuel* de C au temps t l'intervalle de temps $[t, t + 2d(C)]$.

Il est clair maintenant que le paysage tel que nous l'avons construit au chapitre 4 ne représente pas vraiment l'information utilisable par le CR. En effet, certaines informations ne durent pas assez longtemps pour pouvoir être perçues directement. Nous verrons dans le prochain chapitre comment corriger la notion de paysage pour tenir compte de cette remarque.

5.3 Remarques

Dans leurs divers articles sur la théorie des SEM, Ehresmann et Vanbremeersch présentent le *temps* de manières très différentes et parfois contradictoires. Ainsi les mêmes concepts portent des noms différents, ou — ce qui est plus gênant — les mêmes noms désignent des concepts distincts.

J'ai donc essayé de proposer ici une synthèse des principaux éléments qui, si elle ne correspond pas à la lettre à la théorie de départ, en respecte au moins l'esprit.

Pour ce faire, j'ai omis quelques indicateurs temporels supplémentaires qui apparaissent dans certains articles et qui ne me semblaient pas essentiels à la ligne générale de la théorie.

Notons encore que sur la base des différentes mesures temporelles qu'ils introduisent, les auteurs développent une *théorie du vieillissement* qui, selon leurs termes, "unifie les différentes théories du vieillissement connues" ([EV92]). L'idée est que certaines inégalités doivent être maintenues entre certains de ces indicateurs temporels. Quand ces contraintes ne peuvent plus être respectée, la dynamique du système en est modifiée, notamment par le ralentissement du rythme de travail des CR.

Chapitre 6

Stratégies

Nous avons distingué des sous-structures de nos systèmes que nous avons appelées *centres de contrôles*. Cependant, pour l'instant, il faut reconnaître qu'ils ne contrôlent rien du tout... Nous allons donc introduire les notions nécessaires pour donner à ces centres la capacité de diriger — ou du moins d'influencer — l'évolution du système.

6.1 Paysage actuel

Soient S un SEH et C un CR de S de délai de propagation $d(C)$. Lorsque C veut construire son paysage, chacun des agents va échanger des informations avec les autres, sur la base de son champ à ce moment là. Nous avons vu que ce processus d'échange prend un temps de l'ordre de $2d(C)$, c'est à dire la durée du présent actuel de C. Si certains éléments du champ d'un agent disparaissent pendant cette période, il ne pourront pas être pris en compte dans le paysage de C. En bref, l'information utilisable par le CR C est celle qui est disponible durant une bonne partie du présent actuel de C.

Plus formellement, on peut construire un foncteur

$$P : [t, t + 2d(C)] \to \mathbf{CAT}$$

dont le domaine est le présent actuel de C, vu comme ordre partiel. Ce foncteur envoie chaque instant t sur le paysage de C en t, et chaque flèche sur le foncteur transition correspondant. En tant que diagramme dans $\mathbf{CAT}$, ce foncteur admet une colimite $\mathcal{C}$, dont les éléments sont les "trajectoires" des éléments des paysages instantanés.

Cette catégorie $\mathcal{C}$ contient un peu trop d'information ; en effet, un élément qui apparaîtrait dans le paysage juste avant la fin du présent actuel serait représenté dans $\mathcal{C}$, alors qu'il ne ferait bien évidemment pas partie de l'information utilisable par C.

On est ainsi amené à construire la sous-catégorie pleine $\mathcal{P}$ de $\mathcal{C}$ dont les éléments sont les informations qui apparaissent dans le paysage entre t et $t + d(C)$, c'est à dire durant la première moitié du présent actuel.

SEM 14. La catégorie $\mathcal{P}$ construite ci-dessus est appelée *paysage actuel* de C. Elle représente l'information effectivement utilisable par le CR C.

De manière métaphorique, on peut évoquer l'exemple du cinéma : nous sommes incapables de percevoir séparément les images successives d'une séquence filmée, mais nous les percevons à un niveau supérieur, sous forme de *mouvement*. Nous avons donc regroupé les informations qui nous parviennent sous forme de trajectoires, perçues en tant que totalité.

6.2 Stratégies et complexifications

La notion de *stratégie* permet à un CR de spécifier la manière dont il voudrait voir évoluer le système[1]. C'est donc un outil de spécification. Nous n'aborderons par contre pas la question de savoir *comment* un CR est capable de choisir une stratégie sur la base de son paysage actuel ; en effet, cette question est très dépendante du système modélisé. On imagine bien que ce processus sera différent s'il s'agit d'un processus cellulaire, du dispositif de contrôle d'un robot, ou d'une société humaine !

Dans la terminologie que nous avons développée, un CR peut vouloir supprimer des objets ou en regrouper certains sous forme d'une colimite. Il peut aussi souhaiter l'apparition de nouveaux objets dans son paysage, pour remplir une fonction donnée[2]. Du point de vue formel, ceci nous donne la définition suivante :

SEM 15. Soit K une catégorie. Une *stratégie* sur K est formée

- d'un sous-ensemble S de l'ensemble K_0 des objets de K, représentant les éléments à *supprimer* ;
- d'un ensemble C de diagrammes de K, représentant les diagrammes dont il faut construire la colimite ;
- d'un ensemble A, décrivant les objets à *absorber*.

Dans certains de leurs textes, Ehresmann et Vanbremeersch introduisent des stratégies plus complexes, contenant par exemple la description de limites à construire en plus des colimites. La définition ci-dessus regroupe les éléments communs aux différents articles et qui semblent donc constituer une sorte de "base minimale" pour une stratégie. Nous verrons tout de même au chapitre 8 un cas où il est souhaitable d'inclure la construction de limites dans une stratégie.

Notons que la notion de stratégie a un pendant mathématique précis, appelé *esquisse*. Ce sont de puissants objets de spécification à l'intérieur d'une catégorie. Pour plus de détails, reportez-vous à [BW90], qui propose une bonne introduction à la théorie des esquisses.

Ayant sélectionné une stratégie, un CR va généralement tenter *d'anticiper* son résultat, ce qui lui permettra de comparer ses buts avec ce qui arrive effectivement, et, le cas échéant, de "rectifier le tir". C'est là que la notion de *complexification* entre en jeu.

Étant donnée une stratégie (S, C, A) sur un état K_t d'un système évolutif K, on peut s'intéresser aux états suivants possibles K^i_{t+1}, munis de leur foncteur transition respectifs. Parmi ces états, on considère ceux qui *remplissent les buts* de la stratégie, c'est à dire qu'ils vérifient les points suivants :

- Tous les objets de S sont envoyés sur 0 par le foncteur transition ;
- tous les diagrammes de C admettent une colimite dans K^i_{t+1} ;

1. Par commodité, je vais parler des agents et des CR comme s'ils étaient doués d'une *volonté propre*. Cependant, ceci n'est pas indispensable au modèle et peut être remplacé par tout mécanisme qui permet d'avoir une réaction circonstanciée dans une situation donnée...

2. Notons que ce point est le seul de la théorie des SEM qui fait figurer explicitement des objets externes au système — ou au paysage d'un CR — comme composante de la modélisation. Il serait intéressant de voir si l'on peut s'en passer pour obtenir une modélisation d'un système qui fonctionne exclusivement sur la base de sa structure interne.

– K_{t+1}^i contient tous les objets de A.

Or parmi ces états suivants vérifiant les buts, on peut montrer qu'il en existe un minimal, et que celui-ci est unique (à isomorphisme près !).

SEM 16. La catégorie minimale vérifiant les buts d'une stratégie est appelée *complexification* selon la stratégie donnée.

Pour obtenir une définition plus formelle de la complexification, il faudrait se plonger un peu plus profondément dans la théorie des esquisses, ce que nous ne ferons pas ici. Relevons simplement que cette théorie démontre qu'étant donnée une stratégie, on peut construire explicitement la complexification correspondante, ce qui est important pour la pertinence de notre modèle !

6.3 Utilisation par les CR

Nous avons représenté l'information accessible à un CR par une catégorie, le paysage actuel du CR. Celui-ci pourra donc sur cette base préciser dans quel sens il désire voir évoluer le système. Ceci se fera bien entendu par le choix d'une stratégie sur son paysage actuel. La complexification du paysage actuel selon cette stratégie s'appellera *paysage anticipé* du CR.

Malheureusement, Ehresmann et Vanbremeersch ne précisent pas quels sont les moyens que le CR peut effectivement mettre en œuvre pour influencer l'évolution du système. Peut-être est-ce parce que ce point-là, comme le problème du choix d'une stratégie, dépend aussi beaucoup du système considéré. Toujours est-il que cette question mérite une réflexion approfondie, car elle est assez centrale dans la théorie.

Il serait notamment intéressant de se demander s'il est possible que dans certains systèmes, le choix d'une stratégie et la construction de sa complexification constituent le mécanisme même de sa mise en œuvre. En effet, comme nous n'avons pas distingué les "organes effecteurs" des autres composants de notre système, la "réflexion" d'un CR pourrait, *a priori*, provoquer une action sur son entourage.

Si l'on se pose la question de la mise en œuvre des stratégies, une autre question apparaît immédiatement : que se passe-t-il si plusieurs CR cohabitent dans le système, et élaborent des stratégies ? cette question fera le sujet du chapitre suivant.

Chapitre 7

Dialectique entre centres de régulation

Jusqu'à maintenant, nous n'avons considéré qu'un seul CR à la fois. Or dans la plupart des situations, il existe une famille de CR de niveaux hiérarchiques divers qui influencent simultanément l'évolution du système. Nous allons donc introduire la notion suivante :

SEM 17. Soit S un SEH ; un ensemble de CR de S sera appelé *système de régulation* de S.

Mais la présence simultanée de plusieurs CR dans notre système pose immédiatement la question de leurs interactions ; en effet, deux CR distincts peuvent élaborer des stratégies conflictuelles, dues à la différence de l'information à laquelle ils ont accès — ou simplement aux fait qu'ils ont des buts divergents.

Nous allons donc étudier comment diverses stratégies simultanés peuvent se renforcer l'une l'autre ou au contraire entrer en conflit. Mais auparavant, nous allons résumer un peu ce que nous savons sur les habitudes de vie de nos CR...

7.1 Le cycle d'un CR

Comme nous l'avons vu, la fonction d'un CR est de choisir puis de mettre en œuvre des stratégies successives. Normalement, ce processus se déroule de la manière suivante :

– Dans un premier temps, le CR rassemble et compare les informations qui lui parviennent. Il construit son paysage actuel, qui résume l'information qui lui est accessible.

– Ensuite, il choisi une stratégie sur la base de ce paysage. Rappelons que la manière dont ce choix est effectué est très dépendante du système considéré et ne semble pas pouvoir être modélisée en toute généralité.

– Après cela vient la phase de mise en œuvre de la stratégie sélectionnée et de construction du paysage anticipé. Cette phase semble également très dépendante du système étudié. Dans certains cas, il se peut que la mise en œuvre de la stratégie soit précisément la construction du paysage anticipé.

– Au début de l'étape suivante, après la construction du nouveau paysage actuel, le CR peut comparer son paysage anticipé au paysage effectivement obtenu — et éventuellement utiliser cette information pour affiner le choix de la nouvelle stratégie.

Les stratégies sélectionnées peuvent être répercutées au niveau du système par le foncteur distorsion (cf. chapitre 4). Ceci permet de rassembler les stratégies des différents CR sur leur paysage en une stratégie globale sur le système[1]. L'état suivant du système peut alors être construit sur la base de cette stratégie globale et de l'influence de l'environnement.

On voit donc que, qualitativement du moins, le fonctionnement d'un CR est de type cyclique. La durée de chacun de ces cycles est bien entendu variable, mais on peut supposer que son ordre de grandeur est constant. On peut ainsi définir la *période* du CR, du moins approximativement.

Comme précédemment pour le délai de propagation (cf. paragraphe 5.2), et pour les mêmes raisons, nous supposerons que la période d'un CR augmente avec son niveau de complexité.

Notons que dans certains cas, le déroulement d'une étape doit être interrompu car la stratégie choisie ne peut pas être mise en pratique. Ceci peut être dû à un changement provoqué par l'environnement, mais aussi par l'action antagoniste d'autres CR du système. Dans tous les cas, une telle interruption est désignée par le terme *fracture*.

Il est intéressant d'étudier de plus près les différentes causes possibles d'une fracture. Il peut arriver que la stratégie choisie soit rendue impossible par l'environnement lui-même ; en effet, le CR n'a qu'un accès restreint à l'environnement du système, et il peut arriver que la stratégie qu'il choisit ne puisse pas être répercutée au niveau global.

Il peut également arriver que d'autres agents empêchent la mise en œuvre de la stratégie ; ceci peut être dû au fait que les autres CR n'ont pas les mêmes buts. Il est aussi possible qu'un autre CR aie les même buts, mais que son paysage soit suffisamment différent pour qu'il choisisse une stratégie opposée.

Dans ce contexte, on peut considérer un cas particulièrement intéressant : celui où la période d'un CR de bas niveau est négligeable par rapport à celle d'un CR de haut niveau. Dans ce cas, nous parlerons de CR *hétérogènes* ; nous allons maintenant étudier de plus près la dynamique qui peut s'instaurer dans ce cas.

7.2 Dialectique entre CR hétérogènes

Nous allons donc nous intéresser à un couple de CR hétérogènes ; pour clarifier la discussion, nous ajouterons le préfixe *micro-* aux termes relatifs au CR de bas niveau (micro-CR, micro-agent, micro-paysage, ...) et le préfixe *macro-* aux termes concernant le CR de haut niveau.

Par hypothèse, il se déroule un grand nombre de micro-étapes durant une seule macro-étape. Les changements induits par les micro-stratégies sont généralement trop petits et rapides pour pouvoir être pris en compte dans le macro-paysage, mais leur accumulation peut tout de même provoquer des changements observables au macro-niveau, et même éventuellement une fracture.

Inversement, l'action du macro-CR a de forte chances de se répercuter au micro-niveau, ce qui peut forcer les micro-agents à changer leur stratégies.

On peut donc rencontrer les cas suivants :

Synergie entre les deux CR Les micro-actions sont en accord avec la macro-stratégie ; la dynamique des deux CR en est ainsi fortifiée.

Fracture au micro-niveau sans répercution au macro-niveau ; la fracture est provoquée par un élément externe (environnement, autres CR que les deux que nous considérons,

1. La manière d'opérer ce rassemblement est néanmoins un peu floue, du moins dans mon esprit...

ou encore information insuffisante). La situation peut être débloquée par un simple réexamen de la situation par le micro-CR, ou par une intervention extérieure, par exemple de notre macro-CR.

Fracture au micro-niveau avec répercution au macro-niveau ; dans une situation analogue à la précédente, la fracture peut être assez importante pour se répercuter au macro-niveau. Cette fois encore, la réparation peut découler d'une réévaluation, ou d'une intervention extérieure.

Fracture au macro-niveau imputable au micro-niveau Il peut arriver que les micro-changements accumulés durant une macro-étape rendent impossible l'exécution de la macro-stratégie. Par exemple, les micro-changements peuvent amener à la disparition d'éléments nécessaires à l'exécution de la macro-stratégie.

Fracture au macro-niveau indépendante du micro-niveau ; comme dans le cas du micro-niveau, toutes sortes de facteurs peuvent induire une fracture au macro-niveau sans que celle-ci ne soit due aux micro-changements.

Dans les deux derniers cas, la fracture au macro-niveau peut (ou non) se répercuter au micro-niveau, forçant ainsi le micro-CR à changer de stratégie.

Selon Ehresmann et Vanbremeersch, cette dialectique permet mieux situer les modèles continus de certaines disciplines scientifiques (physique, biologie, sociologie, ...) : ils décrivent la macro-évolution du système, dont l'aspect est généralement continu. Cette continuité est cependant parfois ponctuée de "catastrophes" (au sens de Thom), qui reflètent les fractures provoquées par le micro-niveau.

Chapitre 8

La mémoire

Dans ce chapitre, nous allons (enfin !) étudier comment les SEH peuvent développer une mémoire procédurale qui leur permet, d'après Ehresmann et Vanbremeersch, un véritable apprentissage par essais et erreurs. Mais nous allons d'abord revenir plus en détail sur la perception qu'un CR peut avoir d'un diagramme.

8.1 Formes et sens

Nous allons considérer un état instantané K_t d'un SEH, un CR C et un diagramme D de K_t.

Jusqu'à maintenant, nous n'avons considéré l'information arrivant à C que sous son aspect global, sous forme de colimite. Pourtant, il peut être important de savoir *quel* agent reçoit *quelle* information. En effet, la même information reçue par des agents différents pourra être traitée de manières différentes, dans des délais plus ou moins longs, etc. On va donc s'intéresser à la catégorie $(D \downarrow C)$.

Cette catégorie contient trop d'information. En effet, elle contient *tous* les aspects de D pour C, alors que seuls certains d'entre eux sont effectivement observables par C. C'est pourquoi on considérera plutôt la sous-catégorie pleine de $(D \downarrow C)$ dont les objets sont les aspects de D pour C qui correspondent à des aspects observables dans le paysage actuel P de C.

SEM 18. La sous-catégorie O de $(D \downarrow C)$ décrite ci-dessus est la *catégorie des observables* de D pour C.

Considérons maintenant le foncteur projection $(D \downarrow C) \to C$ qui envoie chaque aspect sur l'agent qui le perçoit. Sa restriction à O, que nous noterons $F : O \to C$, permet de représenter la perception $F(O)$ que C a de D.

SEM 19. Soient D, D' deux diagrammes de K_t et O, O' les catégories des observables correspondantes. Si O et O' sont isomorphes au-dessus de C, c'est à dire s'il existe un isomorphisme $\phi : O \to O'$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} O \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "F"'] & & O' \arrow[dl, "F'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

commute, on dit que D et D' ont la *même forme* pour C.

En d'autres termes, deux diagrammes D et D' ont la même forme pour C si les mêmes agents de C perçoivent les mêmes informations (à isomorphisme près).

Le foncteur F défini ci-dessus induit un diagramme $F(O)$ dans C, donc également dans K_t. On peut ainsi poser la définition suivante :

SEM 20. Si le diagramme $F(O)$ dans K_t admet une limite S, celle-ci est appelée *sens* de D pour C, ou C*-sens* de D.

Attention ! il s'agit bien ici d'une *limite* et non d'une *colimite* ! La proposition suivante permettra de mieux cerner le pourquoi de cette notion :

Proposition 20. *S'il existe, le sens de D pour C a la même C-forme que D.*

Cette notion permet entre autres de modéliser les commandes de mouvement qu'un CR peut émettre, ce qui correspond à l'interprétation intuitive de limite que j'ai donnée au chapitre 2.

On peut encore relever une propriété agréable du modèle : si chacun des objets d de D — considéré comme un diagramme à un seul élément — possède un sens S_d pour C, alors le sens S de D pour C est la colimite des S_d. La structure hiérarchique de notre système se retrouve donc au niveau des sens.

Par contre, une question ouverte pour moi est de savoir comment cette hiérarchie des sens vient s'articuler avec le reste de la hiérarchie : une limite n'étant pas forcément une colimite d'autre chose, certains sens risquent de devoir figurer au niveau 0 de notre SEH, alors qu'ils représentent des concepts de niveau bien plus élevé.

8.2 Les systèmes évolutifs avec mémoire

Nous allons maintenant voir comment la notion de sens peut venir s'insérer dans le reste de la théorie de manière à pouvoir doter nos systèmes d'une mémoire...

Malheureusement, cet aspect qui représente un des grands intérêts de la théorie est assez peu développé dans les articles d'Ehresmann et Vanbremeersch. Je n'ai donc pas réussi à en avoir une vision formelle complète ; cependant, je vais essayer d'en faire une présentation aussi cohérente que possible[1].

SEM 21. Un *système évolutif avec mémoire* est un SEH muni d'un sous-SEH $\mathcal{M}$ appelé *mémoire.*

Notation. Nous continuerons bien entendu à noter SEM pour *système évolutif avec mémoire.*

Il s'agit maintenant de préciser le rôle et la structure de $\mathcal{M}$; l'idée est que cette mémoire va contenir les sens de certains diagrammes que l'on veut mémoriser.

Ainsi, à chaque étape, la stratégie d'un CR donné pourra inclure la construction de *limites* de diagrammes — leur sens, selon notre terminologie —, et $\mathcal{M}_t$ sera justement la catégorie dont les objets sont les sens construits jusqu'à l'instant t.

1. Au fait, les auteurs *parlent* beaucoup de la mémoire de leurs systèmes, mais n'y accordent que très peu de place dans les développements formels. On trouve un tel développement dans [EV92], mais il est pour le mois succinct...

Notons que nous devons pour cela admettre des stratégies un petit peu plus générales que celles que nous avions jusqu'à maintenant, à savoir des stratégies qui permettent, en plus des colimites, de construire des limites. Cependant, ceci ne change en rien les processus qui régissent la vie d'un CR.

La question est maintenant de savoir quels sens il faut construire. Or c'est précisément ce point qui me paraît encore nébuleux. Ma description est donc condamnée à rester relativement informelle [2].

Lors de l'une de ses étapes, un CR va inclure dans sa stratégie la construction d'un sens S représentant les éléments pertinents de son paysage actuel, et d'un sens S' représentant la stratégie choisie [3]. Il doit y avoir une flèche dans $\mathcal{M}$ de S à S' ; intuitivement, cela veut dire : "dans telle situation, j'ai utilisé telle stratégie".

On peut après cela introduire un *agent évaluateur* dans C qui doit contenir dans son champ les flèches de $\mathcal{M}$ construite par C. Il peut ainsi les pondérer en fonction du résultat de la stratégie choisie — c'est-à-dire en fonction de l'adéquation entre le paysage anticipé et le paysage actuel à l'étape suivante. Ceci permet donc d'encourager les stratégies qui, dans une situation donnée, ont donné un bon résultat.

8.3 Remarques

La présentation ci-dessus mériterait plus de précision, j'en suis conscient. Je crains pourtant, en cherchant à être plus précis, de m'éloigner de la ligne prévue par les auteurs de la théorie. Cependant, il serait faux de penser que, puisqu'elles sont encore en partie informelles, ces idées sont sans valeur.

C'est pourquoi je vous présente dans ce paragraphe quelques remarques personnelles et informelles, dont le but est de vous montrer que les concepts ci-dessus pourraient être d'une grande force — pour peu qu'on parvienne à les formaliser précisément.

Les réflexes Une question qui se pose encore est la suivante : une fois les situation mémorisées, par la construction d'une limite, comment s'en *rappeler* ? Sans doute par un processus d'échange d'information le long des flèches qui relient le CR et les objets de $\mathcal{M}$. Cependant, il me semble qu'un cas intéressant peut se présenter ; voyons de plus près ce qu'il se passe.

Supposons qu'un CR C a mémorisé une situation sous forme d'un sens S. S est donc le sommet d'un cône limite sur C. Par conséquent, tout cône sur C peut factoriser par S. Autrement dit, toute information cohérente vers C dans son ensemble peut transiter par S. Ce dernier peut à ce moment là décider de propager ou non l'information vers le sens représentant la stratégie choisie.

Ainsi, on peut se trouver dans une situation ou la mémorisation permet une exécution presque instantanée d'une stratégie, sans passer par le processus de décision du CR. On obtient donc quelque chose comme la mise en place d'un *réflexe*.

Mémoire partagée Jusqu'à maintenant, nous n'avons considéré dans $\mathcal{M}$ que les flèches indispensables ; mais une plus grande connectivité pourrait se révéler très intéressante. Notamment, si plusieurs CR ont accès aux mêmes sens de $\mathcal{M}$, l'apprentissage d'un CR pourrait être utile à un autre. On peut ainsi imaginer la mémoire comme un élément coordinateur des

2. C'est à dire que je ne peux pas exhiber explicitement les diagrammes dont on veut construire le sens.
3. Il y a donc un problème : ce dernier point modifie la stratégie que le sens est censé représenter...

CR, et donc comme une manière d'éviter autant que possible les fractures. Dans ce cas, on peut raisonnablement espérer que le système deviendra de plus en plus stable au cours du temps.

Bien sûr, avant de pouvoir vraiment espérer ce genre de coordination, il faudrait préciser le formalisme utilisé... mais ces intuitions peuvent contribuer à encourager cette démarche qui, on le voit, pourrait se révéler fructueuse.

Chapitre 9

Conclusion

Il y aurait encore beaucoup à dire sur la théorie des SEM. Le but de cette deuxième partie n'était pas d'en faire une présentation complète[1], mais plutôt de l'utiliser comme illustration de certains des concepts présentés dans la première partie.

Parmi les concepts que j'ai passé sous silence, on peut citer :

Rétro-spection On peut s'intéresser à l'étude des systèmes dont les CR sont capables, lors d'une fracture, d'enrichir leur paysage actuel pour y intégrer des éléments qui n'étaient au départ pas observables (car ils avaient une "durée de vie" trop courte). Dans [EV92], de tels CR sont décrits comme ayant "la propriété de rétro-spection".

On peut illustrer cette propriété par l'exemple d'un musicien qui peut, lorsqu'il a fait une fausse note, "disséquer" la mélodie qu'il vient d'entendre en notes distincte pour repérer laquelle il doit corriger.

Pro-spective Dans [EV92], Ehresmann et Vanbremeersch définissent également la "propriété de pro-spective", qui se traduit par la capacité d'un CR à planifier ses actions sur plusieurs étapes, au lieu d'une seule comme jusqu'à maintenant. Ceci nécessite la formation d'entités complexes dans la mémoire du système.

Liens simples et complexes Une grande partie de [EV96] est consacrée à la distinction des liens[2] "simples" et "complexes" dans le système, ce qui permet de préciser jusqu'à quel point la partition en niveaux de complexité est intrinsèque à la structure de la catégorie.

L'idée est de voir à quelles conditions un objet du niveau n, par définition colimite d'un diagramme de niveau $n-1$, peut être exprimé directement comme une colimite d'un diagramme de niveau $n-2$.

Dans certains cas — précisément lorsque des liens *complexes* interviennent — cette réduction n'est pas possible, et la distinction des niveaux a donc un caractère intrinsèque à la structure du système.

Précisons encore que ces liens complexes apparaissent si certains objets sont colimites de plusieurs diagrammes non isomorphes, c'est à dire s'ils peuvent être représentés par plusieurs structures non équivalentes. Ces objets sont appelés *multifold objects*[3].

1. Ce serait difficile, puisque cette théorie est encore en développement...
2. Les auteurs parlent de "liens" pour désigner les flèches de leurs catégories.
3. J'ignore les termes français choisis par les auteurs pour ce concept.

Les articles d'Ehresmann et Vanbremeersch contiennent également beaucoup d'exemples, allant de la réplication de l'ADN d'une bactérie ([EV89a]) au fonctionnement d'une entreprise ([EV93]), en passant bien entendu par le système neuronal ([EV91]).

Une description détaillée de ces exemples sortirait du cadre de ce travail, mais la variété des domaines abordés montre la volonté des auteurs d'élaborer une théorie d'une grande généralité.

Pour conclure, relevons que si les grandes lignes de la théorie sont bien tracées, plusieurs détails restent encore dans l'ombre. Parmi eux, citons :

1. Il serait souhaitable de préciser les notions concernant la temporalité. Les différents articles que j'ai lu présentent toujours une certaine dose de flou à ce sujet.

2. La question de la mémoire mériterait un peu plus de précision au niveau formel (d'autant plus que cet aspect de la théorie est mis en avant par le nom *système évolutif avec mémoire*).

3. Le problème des techniques de choix d'une stratégie par un CR est encore entier. Une réflexion sur la possibilité d'aborder ce problème en toute généralité permettrait au moins, le cas échéant, d'expliquer pourquoi ce n'est pas faisable...

4. On peut faire à peu près la même remarque à propos de la mise en œuvre des stratégies par les CR et la manière dont plusieurs stratégies concurrentes interagissent.

Les deux premières questions trouveraient vraisemblablement leur solution dans un texte de synthèse sur la théorie. Un tel texte n'existe pas encore ; néanmoins, Madame Ehresmann m'a annoncé qu'elle-même et J.-P. Vanbremeersch sont en train de rédiger un livre sur la théorie des SEM. Nous attendrons donc patiemment...

Concernant le problème de la mémoire, on peut tout de même se demander si l'idée d'une *mémoire centrale*, bien localisée, constitue la meilleure approche. Je n'ai pas rencontré de justification de ce choix jusqu'à maintenant. Peut-être les textes à venir seront-ils plus bavards à ce sujet.

Pour toute la problématique liée aux stratégies, il me semble qu'un rapprochement avec la théorie *Influence-réaction* de J. Ferber et J.-P. Müller ([FM96]) pourrait se révéler fructueux. Ce modèle, destiné à la programmation de systèmes multi-agents, décrit un monde où des agents[4] produisent des *influences*, lesquelles vont être combinées entre elles et avec la dynamique de l'environnement pour produire l'état suivant du système. Ceci ne me semble pas très loin de nos CR qui produisent des stratégies pour influencer l'évolution du SEH.

Dans [FM96], les auteurs utilisent un formalisme logique pour décrire l'état du système[5], mais ils précisent que "the state of the environment can be represented by any structure". De plus, remplacer un ensemble de formules logiques par une catégorie ne représente pas forcément un énorme changement, vu les rapports étroits entre catégories et logique.

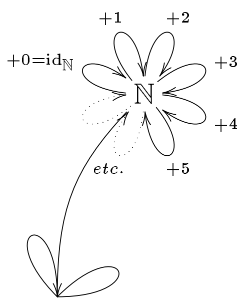
Ce rapprochement permettrait peut-être de suivre une voie qui n'est qu'évoquée dans [FM96], et qui consiste à ne pas séparer la présentation des agents de celle de l'environnement. C'est, me semble-t-il, à peu près ce qui se passe si l'on considère nos CR comme des agents dans ce sens-là.

Une étude plus approfondie de ces différents points permettrait peut-être d'aborder la question, toujours ouverte, du statut exact de la théorie des SEM : le modèle est-il assez

4. Attention ! le mot *agent* est ici utilisé dans son sens informatique, distinct de celui de la théorie des SEM !
5. Il s'agit du formalisme de STRIPS.

précis pour "se prêt[er] à des simulations sur ordinateur" ([EV89b]), ou bien se situe-t-il à un niveau purement descriptif, "uncomfortably near the borderline of modelling for its own sake" ([EV89a]) ? Actuellement, seules des simulations partielles et assez rudimentaires ont été réalisées. Mais Madame Ehresmann m'a assuré être "persuadée qu'un développement de simulations plus avancées pourrait constituer une orientation de recherche très fructueuse tant sur le plan pratique que théorique."

Ainsi, la recherche autour de la théorie des SEM a encore de beaux jours devant elle. Quant à nous, nous en resterons là, puisque le but de cette deuxième partie était de fournir une illustration de la théorie des catégories — et non une théorie complète et consistante des systèmes complexes...



Aux différentes personnes de mon entourage qui ont suivi l'évolution de mon travail par celle des diagrammes qu'il contenait, et qui ont su y voir les choses les plus originales et les plus poétiques...

Bibliographie

[Bol94] P. Boldini. « Morphismes et catégories : une lecture formelle de Piaget ». *Intellectica*, pages 187–216, février 1994.

[Bol95] P. Boldini. « *Contributions de la Théorie des Catégories à la Représentation des Connaissances* ». Doctorat de l'Université de Rennes I, *mention* Informatique, Université de Rennes I, février 1995.

[BW90] M. Barr et C. Wells. *Category Theory for Computing Science.* Prentice Hall International, 1990.

[EM45] S. Eilenberg et S. MacLane. « General Theory of Natural Equivalences ». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 58 :231–294, 1945.

[EV89a] A.C. Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch. « Modèle d'interaction dynamique entre un système complexe et des agents ». *Revue internationale de systémique*, 3(3) :315–341, 1989.

[EV89b] A.C. Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch. Systèmes hiérarchiques évolutifs à mémoire auto-régulée. Dans Z.W. Wolkowski, éditeur, *Synergie et cohérence dans les systèmes.* Centre Interuniv. Jussieu-Saint-Bernard, 1989. Résumé d'un séminaire (tient sur une demi-page).

[EV91] A.C. Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch. « Un modèle pour des systèmes évolutifs avec mémoire, basé sur la théorie des catégories ». *Revue internationale de systémique*, 5(1) :5–25, 1991.

[EV92] A.C. Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch. « Outils mathématiques pour modéliser les systèmes complexes ». *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, XXXIII :225–236, 1992.

[EV93] A.C. Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch. « Rôle des contraintes structurales temporelles dans les systèmes complexes ». Dans *Premier congrès biennal de l'association française des sciences et technologies de l'information et des systèmes*, Systémique et cognition, pages 103–112, Versailles, juin 1993.

[EV96] A.C. Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch. « Multiplicity principle and emergence in memory evolutive systems ». *Journal of Systems Analysis, Modelling, Simulation*, 26 :81–117, 1996.

[FM96] J. Ferber et J.-P. Müller. « Influences and Reaction : a Model of Situated Multiagent Systems ». Dans *ICMAS '96*, Kyoto, décembre 1996. MIT Press.

[Hen90] G. Henriquès. Morphismes et transformations dans la construction d'invariants. Dans J. Piaget, éditeur, *Morphismes et catégories*, Chapitre XIII, pages 183–208. Delachaux & Niestlé, 1990.

[Joh77] P.T. Johnstone. *Topos Theory.* Academic Press, 1977.

[Law66] F.W. Lawvere. « The Category of Categories as a Foundation for Mathematics ». Dans *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra at La Jolla.* Springer-Verlag, 1966.

[LS86] J. Lambek et P.J. Scott. *Introduction to higher order categorical logic.* Cambridge studies in advanced mathematics, 1986.

[LS97] F. W. Lawvere et S. H. Schanuel. *Conceptual Mathematics.* Cambridge University Press, 1997.

[Mac71] S. MacLane. *Category theory for the working mathematician.* Springer-Verlag, 1971.

[McL92] C. McLarty. *Elementary Categories, Elementary Toposes.* Clarendon Press, 1992.

[Ros91] R. Rosen. *Life Itself.* Columbia University Press, New York, 1991.

[Sal97] J. Sallantin. *Les agents intelligents.* collection informatique. Hermes, 1997.

[Vic95] S. Vickers. « Toposes *pour les nuls* ». *Semantics Society Newsletter*, 4, 1995.

[Vic96] S. Vickers. « Toposes *pour les vraiment nuls* ». Dans *Theory and Formal Methods 1996.* Imperial College Press, 1996.

Index