“S’il vous plaît, dessine-moi une preuve”

ou les vertus graphiques de la théorie des catégories

Matthieu Amiguet

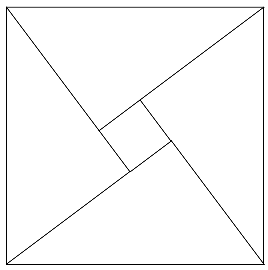
Équipe CASCAD
Institut d’informatique de l’Université de Neuchâtel
matthieu.amiguet@info.unine.ch

1 Introduction

Si trouver la démonstration d’un nouveau résultat constitue toujours une réussite mathématique, la plupart des mathématiciens ne se contentent pas de ce but. Il s’agit généralement, de surcroît, que cette preuve soit concise, claire, facilement compréhensible, bref, en un mot, “élégante”. Outre la satisfaction esthétique qui en résulte, ces caractéristiques munissent généralement le nouveau résultat d’avantages pratiques non négligeable: le résultat est mieux compris, mieux retenu, et donc plus facilement utilisable par la suite. De plus, une preuve “élégante” témoigne d’un arsenal théorique bien adapté, suffisamment puissant pour que le résultat ne “résiste” pas trop.

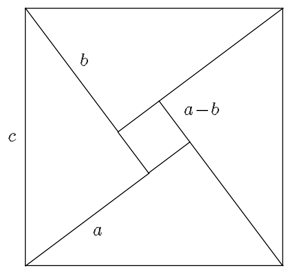
Au sommet du palmarès de la preuve élégante se situe bien entendu la preuve “par contemplation”: un dessin bien adapté qui, en lui-même, constitue la démonstration désirée. Il est clair cependant que ce “Graal” de la preuve mathématique est en partie irréalisable: le dessin ne sera constitutif d’une preuve que pour une personne suffisamment introduite à la problématique, aux notations utilisées, à la manière de réfléchir, etc. propres à la personne ayant rédigé la preuve.

Ainsi, lorsque Bhaskara ([Bha]), au 12$^{\text{e}}$ siècle, propose pour preuve du théorème de Pythagore le schéma suivant



accompagné du simple mot “Voyez!”, il suppose implicitement que le lecteur est assez habile dans la réflexion mathématique: pas tout le monde ne s’écrie spontanément, en voyant ce schéma: “La somme des carrés des cathètes est égale au carré de l’hypothénuse”.

Cependant, il est vrai que ce dessin une fois réalisé, la preuve est presque immédiate: en appelant a et b les cathètes et c l’hypothénuse du triangle rectangle, on reporte ces longueurs sur le schéma précédent;



ensuite, on écrit que l'aire du grand carré est égale à la somme des aires des 4 triangles et de celle du petit carré

$$c^2 = 4\frac{ab}{2} + (a-b)^2,$$

d'où l'on déduit immédiatement le théorème:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Mais les mathématiques ont bien évolué depuis le 12$^{\text{e}}$ siècle, et l'avènement il y a une centaine d'années de la méthode axiomatique [1] a relégué ce genre de raisonnement intuitif au rang d'amusement sans prétention. En effet, on a vu apparaître au sein de la communauté mathématique une méfiance toujours plus grande de l'intuition, au profit du raisonnement "objectif" et "sûr" que permet la méthode axiomatique. Celle-ci en effet — basée sur la manipulation de symboles purement formels, et théoriquement dénués de signification — permet de chasser l'arbitraire et le non-dit, pour ne garder dans le champ des mathématiques que des vérités "absolues" [2].

Nous n'allons pas ici disserter sur les avantages et les inconvénients de la méthode axiomatique. Toujours est-il que celle-ci, en bien ou en mal, a pris possession de toutes les mathématiques; ainsi le raisonnement intuitif — et particulièrement le raisonnement géométrique — se trouve avec un statut, au mieux, d'adjuvant informel du raisonnement mathématique, et au pire, de vestige encombrant des temps de l'obscurantisme pré-axiomatique!

Ainsi, toutes les notions géométriques habituelles ont été "algébrisées" pour pouvoir s'inscrire dans le cadre de l'axiomatisation des mathématiques. Pour illustrer ceci, nous allons rapidement étudier deux notions éminemment géométriques, mais qui sont dotées dans les mathématiques actuelles de formulations algébriques: la convergence et l'orthogonalité.

La convergence On exprime qu'une suite de points (x_n) converge vers un point p (c'est à dire, *grosso modo*, que x_n se rapproche de plus en plus de p quand n augmente) par la formule suivante:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : n > N \Rightarrow |p - x_n| < \varepsilon$$

Dans cette formulation, tout souvenir de formulation géométrique a disparu, donnant ainsi une définition de la convergence d'une précision irréprochable, mais dans laquelle l'intuition peine à trouver sa place!

L'orthogonalité Dans un espace vectoriel muni d'un produit scalaire [3], deux vecteurs x et y sont perpendiculaires si leur produit scalaire est nul:

$$(x \mid y) = 0.$$

Comme précédemment, toute référence suspecte à un espace géométrique intuitif est remplacée par une référence contrôlée à un "espace préhilbertien", entièrement défini axiomatiquement, et dans lequel les notions géométriques courantes peuvent s'exprimer sous forme d'équations.

1. Il s'agit bien ici de la méthode axiomatique initiée par Frege, Russel, etc., et non de celle développée par Euclide pour la géométrie!
2. C'est du moins ce qu'on attendait de cette méthode.
3. C'est ce que les mathématiciens appellent un "espace préhilbertien".

Ainsi, les mathématiques actuelles ne sont plus que lettres et équations [4]; on pourrait donc penser que le paradis de la preuve par contemplation est définitivement hors d'atteinte.

Pourtant, il y a une théorie actuelle qui, de ce point de vue-là, sort du lot: la théorie des catégories. Celle-ci en effet, si elle est comme les autres de base algébrique et axiomatique, utilise un langage graphique pour exprimer ses concepts et démonstrations. Ceci est d'autant plus intéressant qu'il a été prouvé que la théorie des catégories peut servir de fondements aux mathématiques ([Law66]). Ainsi donc, en plus d'être partiellement graphique, cette théorie a la possibilité d'exprimer tous les concepts mathématiques existants. Mais voyons donc de plus près en quoi elle consiste.

2 La théorie des catégories

La théorie des catégories est une théorie abstraite (très abstraite!), et assez difficile à saisir conceptuellement. Il n'est donc pas possible d'en proposer une exposition complète dans ce texte [5]. Nous en proposerons donc ici une exposition conceptuelle et partiellement informelle; pour plus de détails, référez-vous par exemple à [Ami98], [BW90] ou [Lan71].

Mais avant de passer à la présentation théorique proprement dite, il convient de mettre en évidence un aspect fondamental de cette théorie: son côté relationnel.

2.1 Une théorie relationnelle

Une des caractéristiques principales de la théorie des catégories est d'être relationnelle. Pour bien comprendre ce que cela veut dire, commençons par une petite parabole.

Vous cherchez le laboratoire de mathématiques dans une ville que vous ne connaissez pas. Après avoir erré un moment, vous demandez votre chemin; malheureusement, la personne à qui vous vous adressez ne sait pas non plus où se trouve le laboratoire. Par contre, elle vous signale qu'un agent de police se trouve au prochain carrefour, et que celui-ci pourra sans doute mieux vous aiguiller. Comme vous ne connaissez pas la ville, vous vous inquiétez de comment le reconnaître. A cette question, deux types de réponse (au moins !) sont possibles:

1. "Il est grand, maigre, avec des lunettes, une grosse moustache et un képi bleu".
2. "Il est au milieu du carrefour, les autos s'arrêtent quand il lève le bras et les gens n'ont pas l'air contents quand il siffle".

Chacune de ces descriptions vous permettra bien sûr de trouver votre agent. Cependant, on remarque une petite différence d'effet entre la première, qui ne fait appel qu'à des caractéristiques personnelles de cet agent de police, et la seconde, qui n'utilise que des caractéristiques qui le mettent en relation avec son environnement.

La première description vous permettra de trouver votre agent même s'il est en pause, assis au bord de la route. Cela peut être utile si vous cherchez à parler à cet agent en particulier, par exemple parce que vous savez que sa fille travaille au laboratoire de mathématiques.

La seconde description pourra vous être d'un grand secours si vous voulez parler à n'importe quel agent, pensant que tous connaissent suffisamment la ville pour vous renseigner. Ainsi, si la relève a eu lieu et que c'est maintenant un petit gros sans képi qui fait la circulation, vous l'identifierez tout de même comme agent de police.

Après toutes ces errances, vous parvenez enfin au laboratoire de mathématiques où la personne avec qui vous aviez rendez-vous vous annonce qu'elle va vous parler du singleton. Comme vous vous inquiétez de savoir ce que c'est, elle vous propose deux réponses:

1. "C'est un ensemble qui a un seul élément, comme $\{a\}$, ou $\{\text{pomme}\}$, par exemple".

4. Ceci est (presque) vrai au niveau du formalisme; cependant, ce n'est pas vrai dans le travail de tous les jours du mathématicien qui se sert bien sûr d'images et d'intuitions...

5. D'autant plus que les textes existants sur cette théorie et ses ramifications constituent largement de quoi remplir une très grande bibliothèque!

2. “C’est un ensemble S tel que pour tout ensemble E il existe exactement une fonction $E \to S$”[6].

La première définition, qui ne fait appel qu’à des caractéristiques intrinsèques du singleton, occulte le fait que pour un mathématicien, l’ensemble $\{a\}$ et l’ensemble $\{\text{pomme}\}$ sont essentiellement les mêmes. La seconde définition, par contre, en ne faisant appel qu’aux relations d’un singleton avec son “entourage”, permet de décrire simultanément tous les ensembles qui partagent les mêmes caractéristiques fonctionnelles.

La seconde définition est typique d’une approche catégorielle. Les définitions relationnelles se concentrent sur les caractéristiques fonctionnelles des objets définis, gagnant en généralité, mais au prix d’une perte d’individualisation de ces objets — et d’une plus grande difficulté conceptuelle!

2.2 Un peu de théorie

Puisqu’il est possible de définir certains ensembles uniquement par leurs relations, on peut être tenté de généraliser cette approche et de voir quels sont les objets mathématiques que l’on peut obtenir de cette manière. La réponse est “tous”[7], et la manière d’y parvenir est la théorie des catégories.

Pour définir ce qu’est une catégorie, nous avons besoin d’une notion préliminaire:

Définition 1. Un graphe est composé d’objets et de flèches reliant ces objets, et peut généralement être représenté par un dessin du type de celui de la figure 1[8].

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "g"] \arrow[dd, "h"] & D \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & \\
 & C \arrow[uur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

FIG. 1: *Un exemple de graphe*

Dans ce dessin, A, B, C et D sont les objets et f, g, h, i et j sont les flèches. On définit les fonctions source et but qui font correspondre à chaque flèche l’objet d’où elle part et où elle arrive. Par exemple dans le dessin, $\text{source}(f) = A$ et $\text{but}(f) = B$. On abrège souvent ces deux dernières équations par l’expression $f : A \to B$.

Le dessin ci-dessus est un exemple de graphe. Un autre exemple, impossible à représenter exhaustivement de cette manière, est le graphe dont les objets sont tous les ensembles et les flèches toutes les fonctions entre ces ensembles.

La notion de graphe permet de décrire une structure relationnelle: les points et les flèches n’ont que peu d’importance par rapport à leur agencement. Mais pour pouvoir faire une analyse mathématique intéressante de ces relations, on a besoin de pouvoir opérer dessus et comparer les résultats. C’est pourquoi on pose la définition suivante:

Définition 2. Une catégorie est un graphe vérifiant les points suivants:

1. À chaque objet A correspond une flèche “identité” notée id_A, dont la source et le but sont A.

6. Il s’agit bien sûr de la fonction constante qui envoie tous les éléments de E sur l’unique élément de S

7. Plus exactement, tous ceux que l’on peut obtenir par l’approche “classique” de la théorie des ensembles.

8. Cette représentation peut être compliquée dans le cas d’un grand nombre d’objets ou de flèches; un dessin complet devient bien sûr impossible si ces entités sont en nombre infini

2. À chaque paire de flèches (f, g) dans la configuration

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \,,$$

on peut associer une flèche $f; g : A \to C$, appelée “composition de f et g”.

3. La composition définie en 2. est associative, c'est à dire que pour trois flèches f, g, h “à la suite”, on a toujours $(f; g); h = f; (g; h)$.

4. la flèche identité id_A d'un objet A est un élément neutre pour la composition, c'est à dire que pour toute flèche $f : C \to A$ on a $f; \mathrm{id}_A = f$ et pour toute flèche $g : A \to C$ on a $\mathrm{id}_A; g = g$.

Par exemple, le graphe dont les objets sont les ensembles et les flèches les fonctions est une catégorie si l'on prend pour flèche identité d'un objet donné la fonction identité de l'ensemble correspondant, et comme composition la composition habituelle des fonctions. De manière plus générale, on peut définir des catégories dont les objets sont des structures mathématiques d'un certain type (groupes, anneaux, corps, graphes, espaces topologiques, ...) et les flèches les fonctions préservant cette structure (resp. homomorphismes de groupes, d'anneaux, de corps, de graphes, applications continues, ...).

Il est d'ailleurs également possible de définir la notion d”'homomorphisme de catégorie”; une telle transformation qui préserve la structure de catégorie s'appelle un foncteur. Comme précédemment, une définition préalable est nécessaire:

Définition 3. Étant donnés deux graphes G et H, un homomorphisme de graphe $F : G \to H$ est composé d'une paire de fonction F_{obj} qui attribue à chaque objet de G un objet de H et F_{fl} qui attribue à chaque flèche $f : A \to B$ de G une flèche $F_{\mathrm{fl}}(f) : F_{\mathrm{obj}}(A) \to F_{\mathrm{obj}}(B)$.

Une catégorie étant un graphe avec une composition et des flèches identité, on en arrive à la définition très naturelle suivante:

Définition 4. Étant données deux catégories C et D, un foncteur $F : C \to D$ est un homomorphisme de graphes qui envoie chaque flèche identité id_A de C sur la flèche identité $\mathrm{id}_{F_{\mathrm{obj}}(A)}$ de D, et chaque composition $f; g$ de C sur la composition $F_{\mathrm{fl}}(f); F_{\mathrm{fl}}(g)$.

2.3 L'aspect graphique

L'aspect graphique de la théorie des catégories repose sur la constatation suivante: les seules affirmations (ou presque) qu'il est possible de faire en théorie des catégories portent sur des égalités entre des composition de flèches [9]. Or ceci se représente très bien de manière graphique, en utilisant la notion de diagramme commutatif. Un diagramme est composé d'objets et de flèches tirés d'une catégorie, par exemple:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ C \arrow[r, "i"'] & D \end{tikzcd}$$

Affirmer de ce diagramme qu'il est commutatif revient à poser l'équation suivante:

$$f; h = g; i$$

De manière générale, un diagramme est dit commutatif si tous ses chemins entre deux mêmes point sont égaux.

9. Au fait, il y a encore en tout cas les assertions portant sur l'existence et l'unicité de certaines flèches; il existe également des notation graphiques pour cela, mais moins universelles

Ainsi, on peut reformuler les définition 3 et 4 ci-dessus de la manière suivante:

Homomorphisme de graphe Soient C, D deux graphes. Une paire de fonctions $F_{\mathrm{obj}} : C_{\mathrm{obj}} \to D_{\mathrm{obj}}$ et $F_{\mathrm{fl}} : C_{\mathrm{fl}} \to D_{\mathrm{fl}}$ est un homomorphisme de graphe si les deux diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd} C_{\mathrm{fl}} \arrow[r, "F_{\mathrm{fl}}"] \arrow[d, "\mathrm{source}_C"'] & D_{\mathrm{fl}} \arrow[d, "\mathrm{source}_D"] \\ C_{\mathrm{obj}} \arrow[r, "F_{\mathrm{obj}}"'] & D_{\mathrm{obj}} \end{tikzcd} \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd} C_{\mathrm{fl}} \arrow[r, "F_{\mathrm{fl}}"] \arrow[d, "\mathrm{but}_C"'] & D_{\mathrm{fl}} \arrow[d, "\mathrm{but}_D"] \\ C_{\mathrm{obj}} \arrow[r, "F_{\mathrm{obj}}"'] & D_{\mathrm{obj}} \end{tikzcd} \tag{2}$$

En effet, le premier diagramme exprime que F respecte la source des flèches, alors que le second exprime la même chose pour leur but.

Foncteur Un homomorphisme de graphe est un foncteur si les deux diagrammes supplémentaires suivants commutent également:

$$\begin{tikzcd} C_{\mathrm{obj}} \arrow[r, "F_{\mathrm{obj}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\bullet C}"'] & D_{\mathrm{obj}} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\bullet D}"] \\ C_{\mathrm{fl}} \arrow[r, "F_{\mathrm{fl}}"'] & D_{\mathrm{fl}} \end{tikzcd} \tag{3}$$

$$\begin{tikzcd} C_{\mathrm{fl}} \times C_{\mathrm{fl}} \arrow[r, "F_{\mathrm{fl}} \times F_{\mathrm{fl}}"] \arrow[d, ";_C"'] & D_{\mathrm{fl}} \times D_{\mathrm{fl}} \arrow[d, ";_D"] \\ C_{\mathrm{fl}} \arrow[r, "F_{\mathrm{fl}}"'] & D_{\mathrm{fl}} \end{tikzcd} \tag{4}$$

Le diagramme 3 exprime donc qu'un foncteur doit préserver les flèches identité, alors que le 4 traduit l'exigence qu'un foncteur doit préserver la composistion des flèches.

Il se trouve que cette notion de diagramme commutatif représente un excellent moyen de de faire des preuves de type algébrique, mais par des moyens graphiques. Ceci repose sur la constatation simple suivante: un diagramme complexe dont toutes les parties commutent commute dans son ensemble. Par exemple, un diagramme du type

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

commute si et seulement si les deux carrés qui le forment commutent. Ce type de raisonnement par diagrammes a pris le nom, en pays anglo-saxon, de *diagram chasing*.

Nous allons illustrer la forme que prennent alors les preuves par la démonstration d'un résultat élémentaire:

Theorème. *La composition de deux foncteurs est un foncteur. Plus précisément, si A, B, C sont des catégories et $F : A \to B, G : B \to C$ sont des foncteurs, alors la composition $F; G : A \to C$ est un foncteur.*

Preuve. Nous avons vu qu'il suffit de vérifier la commutativité de quatre diagrammes. Or chacun de ceux-ci se décompose en deux carrés dont les prémisses nous assurent qu'ils sont commutatifs (car F et G sont des foncteurs):

1. $F; G$ est un homomorphisme de graphes car F et G en sont: pour montrer cela, il suffit d'écrire côte à côte le diagramme 1 pour F et pour G:

$$\begin{tikzcd} A_{\mathrm{fl}} \arrow[r, "F_{\mathrm{fl}}"] \arrow[d, "\mathrm{source}_A"'] & B_{\mathrm{fl}} \arrow[r, "G_{\mathrm{fl}}"] \arrow[d, "\mathrm{source}_B"] & C_{\mathrm{fl}} \arrow[d, "\mathrm{source}_C"] \\ A_{\mathrm{obj}} \arrow[r, "F_{\mathrm{obj}}"'] & B_{\mathrm{obj}} \arrow[r, "G_{\mathrm{obj}}"'] & C_{\mathrm{obj}} \end{tikzcd}$$

   Le carré de gauche affirme que F respecte la source, celui de droite que G respecte la source, et le rectangle complet représente cette même affirmation pour $F; G$. La déduction de cette troisième affirmation à partir des deux autres est donc purement graphique.

   On peut faire de même pour le diagramme 2:

$$\begin{tikzcd} A_{\mathrm{fl}} \arrow[r, "F_{\mathrm{fl}}"] \arrow[d, "\mathrm{but}_A"'] & B_{\mathrm{fl}} \arrow[r, "G_{\mathrm{fl}}"] \arrow[d, "\mathrm{but}_B"] & C_{\mathrm{fl}} \arrow[d, "\mathrm{but}_C"] \\ A_{\mathrm{obj}} \arrow[r, "F_{\mathrm{obj}}"'] & B_{\mathrm{obj}} \arrow[r, "G_{\mathrm{obj}}"'] & C_{\mathrm{obj}} \end{tikzcd}$$

2. $F; G$ est un foncteur car F et G en sont: ceci se démontre comme ci-dessus, mais sur la base des diagrammes 3 et 4:

$$\begin{tikzcd} A_{\mathrm{obj}} \arrow[r, "F_{\mathrm{obj}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & B_{\mathrm{obj}} \arrow[r, "G_{\mathrm{obj}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] & C_{\mathrm{obj}} \arrow[d, "\mathrm{id}_C"] \\ A_{\mathrm{fl}} \arrow[r, "F_{\mathrm{fl}}"'] & B_{\mathrm{fl}} \arrow[r, "G_{\mathrm{fl}}"'] & C_{\mathrm{fl}} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A_{\mathrm{fl}} \times A_{\mathrm{fl}} \arrow[r, "F_{\mathrm{fl}} \times F_{\mathrm{fl}}"] \arrow[d, ";_A"'] & B_{\mathrm{fl}} \times B_{\mathrm{fl}} \arrow[r, "G_{\mathrm{fl}} \times G_{\mathrm{fl}}"] \arrow[d, ";_B"] & C_{\mathrm{fl}} \times C_{\mathrm{fl}} \arrow[d, ";_C"] \\ A_{\mathrm{fl}} \arrow[r, "F_{\mathrm{fl}}"'] & B_{\mathrm{fl}} \arrow[r, "G_{\mathrm{fl}}"'] & C_{\mathrm{fl}} \end{tikzcd}$$

□

A titre de comparaison, voyons aussi la traduction "algébrique" du raisonnement représenté par le premier diagramme de cette preuve:

$$\begin{aligned} \mathrm{source}_A; F_{\mathrm{obj}} &= F_{\mathrm{fl}}; \mathrm{source}_B \\ \mathrm{source}_B; G_{\mathrm{obj}} &= G_{\mathrm{fl}}; \mathrm{source}_C \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathrm{source}_A; F_{\mathrm{obj}}; G_{\mathrm{obj}} &= F_{\mathrm{fl}}; \mathrm{source}_B; G_{\mathrm{obj}} \\ &= F_{\mathrm{fl}}; G_{\mathrm{fl}}; \mathrm{source}_C\end{aligned}$$

On voit donc que la version graphique propose une exposition beaucoup plus facile à suivre qu'une suite de formules algébriques. De plus, la plupart des gens, pour lire une suite de formules algébriques comme ci-dessus, sont obligées pour comprendre de tracer sur une feuille annexe le diagramme dont elle est issue! On voit donc tout de suite l'avantage, pour l'auteur autant que pour le lecteur, de laisser le raisonnement sous sa forme graphique.

Il est clair que sur un résultat aussi élémentaire, le gain représenté par l'utilisation de la méthode graphique reste relativement faible. Mais lorsque les raisonnements de ce type s'enchaînent sur des pages et des pages, ce type de raisonnement graphique représente un gain de lisibilité très considérable. De plus, dans le cas simple ci-dessus, nous n'avons considéré que des diagrammes se décomposant en deux parties. Mais lorsque les décompositions deviennent plus complexes, le gain est chaque fois plus grand. Ainsi, si les diagrammes ci-dessus "encodaient" deux prémisses et un raisonnement en deux étapes, celui ci-après, tiré de [Ami98], représente à lui tout seul 4 équations prémisses, correspondant aux deux triangles et aux deux trapèzes, et un raisonnement en 4 étapes, d'où un gain nettement plus considérable:

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[rrr, "Ff"] \arrow[dr, "FO"] \arrow[dd, "\theta O"'] & & & FA' \arrow[dl, "FO'"'] \arrow[dd, "\theta O'"] \\
& FGB \arrow[r, "FGg"] \arrow[dl, "\epsilon B"] & FGB' \arrow[dr, "\epsilon B'"'] & \\
B \arrow[rrr, "g"'] & & & B'
\end{tikzcd}$$

2.4 Limitations

Si la méthode présentée ci-dessus semble proposer un cadre idéal pour obtenir des preuves par contemplation, il est évident qu'elle est tout de même soumise à un certain nombre de limites.

Nous avons dit que la théorie des catégories peut servir de fondement aux mathématiques. Donc, théoriquement du moins, toutes les mathématiques pourraient s'exprimer dans le formalisme que nous avons esquissé ci-dessus. Cependant, comme avec les autres fondations possibles, certaines branches des "hautes" mathématiques sont en pratique inaccessibles avec les outils simples des fondations. Nous n'avons donc pas tout à fait à faire ici, en pratique, à un formalisme graphique unifié pour toutes les mathématiques.

D'ailleurs, quand les diagrammes deviennent trop complexes, il est peut-être moins aisé de saisir du premier coup d'oeil leur signification. Ainsi la figure 2 représente un diagramme dont l'interprétation est moins immédiate que pour ceux que nous avons vu dans ce texte.

Enfin, il faut relever que la représentation graphique de la théorie des catégories n'est pas tout à fait complète: les équations s'y expriment très bien, mais les assertions d'existence et d'unicité de flèches sont beaucoup moins faciles à intégrer dans un cadre graphique se prêtant à des démonstrations par contemplation. Considérons par exemple le théorème affirmant qu'un élément terminal d'une catégorie, s'il existe, est unique à isomorphisme près [10]. La démonstration n'en est pas difficile, mais elle se prête mal au formalisme graphique présenté ci-dessus, car elle fait un usage essentiel des propriétés d'existence et d'unicité de certaines flèches.

10. Pour plus de détails sur cet énoncé ou sa démonstration, reportez-vous à [Ami98].

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \Omega S^5 & & \\
\Omega\left(M^5_{2\iota}\right) \arrow[rr, "\Omega(\mathrm{pinch})"] & & \Omega S^5 \arrow[urr, "\Omega(2\iota)"] \arrow[rr, "\delta"] & & G \arrow[u, "J"'] \arrow[rr, "h_2"] \arrow[dd, "\pi"] & & J\left(S^4 \wedge S^4\right) \\
 & J_2\left(M^4_{2\iota}\right) \arrow[ur, "\iota"] \arrow[rr, "\delta_2"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & & G_2 \arrow[ur, "\iota"] \arrow[rr, "h_2"] & & S^8 \arrow[ur, "E"'] & \\
M^{12}_{2\iota} \arrow[ur, "\tau"] \arrow[rr, "\bar{\tau}"] & & S^4 \arrow[uuurr, "E"] \arrow[ur, "e"] \arrow[rr, "\iota"] & & M^5_{2\iota} \arrow[rr, "\mathrm{pinch}"] & & S^5
\end{tikzcd}
$$

(β)

FIG. 2: *Un diagramme complexe...*

3 Conclusion

Nous avons présenté un cadre théorique dans lequel l'élément graphique peut constituer un moyen de preuve. Ainsi, la "preuve par contemplation" n'est pas seulement un rêve de mathématicien, mais elle peut effectivement exister dans certaines théories. Il est cependant clair qu'il s'agit là de "contemplation éclairée", c'est-à-dire que le dessin ne constitue une preuve que pour les initiés qui connaissent toute la série de conventions qui accompagne les diagrammes. Mais pour un habitué du *diagram chasing*, cette méthode se révèle très efficace.

Il est intéressant de constater que, si l'on était habitué aux preuves algébriques de résultats géométriques, l'exposition ci-dessus montre que le contraire est également possible: on peut faire une preuve géométrique de résultats algébriques. Notons cependant que la géométrie en question est assez épurée; en particulier, la géométrie de la preuve n'a rien à voir avec la sémantique du résultat démontré (comme c'était le cas pour les preuves géométriques classiques), mais elle ne tient compte que de la structure formelle et algébrique de l'*expression* de ce résultat dans la théorie concernée.

Toujours est-il que les méthodes de preuves mises en oeuvre dans la théorie des catégories sont tellement puissantes qu'on en oublie parfois qu'il y a eu preuve. On en vient à penser que cette théorie n'est qu'une suite de définition. C'est pourquoi on trouve de nombreuses réactions dans la communauté mathématique telles que celle de P. Freyed: "Perhaps the purpose of categorical algebra is to show that which is trivial is trivially trivial".

Ainsi, la théorie des catégories scie la branche sur laquelle elle est assise: le cadre théorique qu'elle propose permet des preuves si élégantes qu'on va parfois jusqu'à lui discuter son statut de théorie! Mais une analyse plus fine montre que ce débat, au fait, ne fait que confirmer le constat suivant: grâce à ses concepts puissants et bien adaptés, grâce aussi à son aspect graphique, la théorie des catégories propose un cadre d'expression formelle riche, expressif et où de nombreuses preuves se réduisent à une simple contemplation.

Références

[Ami98] Matthieu Amiguet. Introduction à la théorie des catégories. Travail de diplôme de l'Université de Neuchâtel, 1998.

[Bha] Bhaskara. Vijagania. Inde, 12^e siècle.

[BW90] Michael Barr and Charles Wells. *Category Theory for Computing Science.* Prentice Hall International, 1990.

[dSE97] Antoine de Saint-Exupéry. *Le petit prince.* Gallimard, 1997.

[Lan71] Saunders Mac Lane. *Category theory for the working mathematician.* Springer-Verlag, New York, 1971.

[Law66] F.W. Lawvere. The Category of Categories as a Foundation for Mathematics. In *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra at La Jolla.* Springer-Verlag, 1966.