Rapport FNRS 1999 : Vers un cadre conceptuel formalisé pour l'activité de l'équipe CASCAD.

Matthieu Amiguet
Équipe CASCAD[*], IIUN, Neuchâtel

10 novembre 1999

Table des matières

1 Problématique

On peut résumer les buts de l'équipe CASCAD de la manière suivante : il s'agit de développer et d'exploiter un cadre conceptuel ainsi que des méthodes de conception et de réalisation d'une structure logicielle et matérielle (SLM ci-dessous) qui, en interaction avec son environnement, produit un comportement désiré.

Deux remarques s'imposent :

1. Notre équipe s'intéresse plus à la programmation logicielle de matériel existant qu'à la conception de matériel. Cependant, il est important de garder à l'esprit que la "couche logicielle" est en un certain sens aussi matérielle que le reste : le déroulement d'un programme se traduit

[*] *Conceptions et Analyse de Systèmes Complexes ADadptatifs.*

par une activité bien précise au niveau physique. C'est essentiellement une distinction de *point de vue* qui intervient là. Nous verrons ci-dessous qu'il est parfois utile de se souvenir du support matériel d'une activité logicielle, et nous continuerons donc de parler de structure matérielle *et* logicielle.

2. Le comportement n'est pas intrinsèque à la SLM produite. En effet, un changement de l'environnement sans changement de SLM provoque généralement un changement de comportement. Ainsi, le comportement résulte véritablement de l'*interaction* entre la SLM et son environnement.

Ainsi le phénomène à modéliser possède deux aspects distincts qu'il s'agit de prendre en compte : un *aspect dynamique*, composé de l'interaction entre la SLM et son environnement ; et un aspect statique, mis en évidence par la permanence désirée du comportement. Mais pour que cette permanence puisse avoir lieu, il faut que la dynamique résulte de l'interaction d'entités possédant elles-mêmes des régularités. Nous devrons donc nous intéresser particulièrement à la structure du système que nous produisons, ainsi qu'à celle de l'environnement. C'est pourquoi nous appellerons cet aspect statique *aspect structurel*.

La dualité dynamique/structurelle de notre problématique peut être représentée par le schéma de la figure 1.

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Dynamique}} \arrow[rr, bend left, "\text{abstraction/émergence}"] & & \boxed{\text{Structure}} \arrow[ll, bend left, "\text{réalisation}"] \end{tikzcd}$$

FIG. 1: Dualité dynamique/structurelle

Nous verrons au paragraphe 2 que le côté "dynamique" a déjà été passablement étudié, avec des résultats très intéressants. Quelques voies ont été explorées également pour passer de là au côté structurel par *abstraction*, c'est à dire en ne retenant que quelques caractéristiques du système dynamique et en les organisant en un langage structurel *sur* le système dynamique étudié (c'est le cas par exemple des logique temporelles, cf paragraphe 2).

Cependant, dans ces approches, le système dynamique est premier, et l'aspect structurel ne vient qu'ensuite. Or ceci est arbitraire : s'il est possible d'avoir un discours structurel sur un phénomène dynamique, c'est que ce phénomène lui-même possède une structure sous-jacente. De même, on ne peut pas plus prétendre que la structure est première, pour les mêmes raisons.

Nous allons donc chercher à développer un discours spécifique à l'aspect structurel. Pour ceci, nous verrons que l'algèbre semble proposer de bons outils, particulièrement dans sa théorie la plus générale, celle des catégories (cf. paragraphe 3).

Il s'agira ensuite de bien étudier les manières de passer d'un formalisme à l'autre. En partant des réflexions déjà menées dans l'équipe sur l'émergence et la réalisation (cf. [Sca96]), nous allons explorer au paragraphe 4 quelles sont les manières de naviguer entre deux formalisations du même phénomène. Nous verrons que ceci pose des problèmes méthodologiques assez importants, mais que des pistes existent pour les surmonter.

2 La modélisation par systèmes dynamiques

La modélisation par systèmes dynamiques utilise les outils traditionnels d'analyse de la physique pour représenter les phénomènes qu'elle aborde. Ainsi, la première étape consiste à représenter le système étudié par un espace vectoriel[1]. Ceci se fait généralement par un choix d'une quantité

[1] Ceci pour les systèmes dynamiques continus. On peut aussi utiliser des systèmes dynamiques discrets, mais les résultats théoriques à disposition sont alors moins nombreux, et il s'agit souvent de théorèmes du cas continu qui ont pu être prolongés au cas discret.

finie (souvent assez limitée) de valeurs numériques décrivant les différents états du système — par exemple, en dynamique du point matériel, trois coordonnées de position et éventuellement trois de vitesse. L'espace ainsi obtenu est appelé *espace d'états* ou *espace des phases*[2]. Ensuite, la dynamique du système est décrite par un jeu d'équations différentielles. Si celles-ci peuvent être résolues (ce qui est rare), on peut obtenir les *équations du mouvement* de notre système. Sinon, il existe un certain nombre d'outils qualitatifs pour décrire le comportement du système dans son ensemble (attracteurs et bassins, bifurcations, etc.)

L'utilisation de la théorie des systèmes dynamiques en sciences cognitives, AI et branches connexes telle qu'elle est présentée dans l'excellent ouvrage [PvG95] repose sur essentiellement deux présuppositions :

1. "Cognitive processes unfold in real time, [which means] really two distincts things. First, real time is a continuous quantity best measured by real numbers, and for every point in time there is a state of the cognitive system." (p.19)
2. "Dynamics provides a vast ressource of extremely powerful concepts and tools. Their usefulness in offering the best scientific explanation of phenomena throughout the natural world has been proved again and again. It would hardly be a surprise if dynamics turned out to be the framework whithin which the most powerful descriptions of cognitive processes were also forthcoming." (p.18)

En effet, les modèles dynamiques permettent de bien rendre compte du déroulement temporel du phénomène étudié. La longue histoire de ce formalisme et ses nombreux succès dans diverses disciplines, à commencer bien sûr par la physique, soutiennent un développement rapide et efficace des modèles dynamiques.

L'ouvrage ci-dessus donne un échantillon significatif de ces remarquables succès de l'approche dynamique et permet ainsi de bien en saisir toute la puissance. Les sujets abordés vont de la prise de décision au langage en passant par de nombreuses formes de perception (auditive, visuelle, ...) et par la coordination sensori-motrice. Les systèmes obtenus sont évidemment tous bien trop compliqués pour obtenir des résolutions des équations différentielles impliquées, mais les comportements qualitatifs des modèles proposés montrent une excellente cohérence avec les données expérimentales (en termes de nombre et formes des attracteurs, influence des paramètres, ...).

Cependant, alors que cette approche semble remporter de plus en plus de victoires, quelques voix dissonantes commencent à se faire entendre dans la communauté scientifique. Les systèmes dynamiques ont bien entendu des limites, et celles-ci commencent à être perçues.

Dans [FB96], Fontana et Buss proposent une excellente critique de l'approche dynamique. Celle-ci porte essentiellement sur le point suivant : dans un système dynamique, l'espace d'états est fixé à l'avance ; ainsi, l'apparition ou la disparition de nouveaux objets est exclue. Ainsi, selon eux, certains phénomènes devraient être décrits en termes d'une théorie découlant plus de la chimie que de la physique. Pour bien illustrer ceci, ils proposent des expérimentations sur la base d'une "chimie artificielle" : basée sur le λ-calcul, cette chimie exhibe des comportements de stabilité et de réparation[3] tout à fait intéressant, mais la possibilité indéfinie de création de nouveaux objets fait qu'une modélisation en termes de systèmes dynamiques (dans l'espace des concentrations) est à peu près impossible. Ainsi, ils évoquent le besoin d'une théorie qui, faisant pendant au classique "espace de phase", permettrait de traiter la dynamique d'un "espace des objets"[4].

[2] L'espace ainsi obtenu ayant une dimensionnalité égale au nombre de valeurs numériques retenues pour la description du système, on cherche généralement à réduire ce nombre pour obtenir des espaces raisonnables du point de vue de leur traitement mathématique ou informatique. Une manière courante de faire ceci est de sélectionner les valeurs qui sont relativement stables au cours de l'évolution du système, et de les faire passer du statut de *variable* à celui de *paramètre*.

[3] Ces deux termes sont à prendre dans un sens informel et peu précis ; les "populations" de λ-expressions obtenues possèdent une composition qui résiste assez bien à l'introduction d'éléments extérieurs perturbateurs. Cependant, ces exprériences sont justement proposées pour montrer les limites de la modélisation dynamique, et par conséquent, les notions formelles classiques de stabilité ne peuvent pas s'appliquer telles quelles.

[4] La métaphore chimique a d'ailleurs inspiré de nombreux chercheurs dans les domaines de la vie artificielle, de l'auto-organisation, etc. On en trouvera une liste non exhaustive à l'adresse http ://ls11-www.informatik.uni-dortmund.de/alife/prj-binsys-rel.html. Parmi les plus célèbres de ces travaux, on trouve [BB92], qui propose une

Ce problème est présent dans notre équipe depuis longtemps et est bien illustré par les travaux actuels d'Antoine Berner : l'espace d'états de son système se modifie au cours du temps, les états se séparant ou se réunissant selon les besoins du système. Ceci pose actuellement des limites au degré de formalisation qu'il est possible d'atteindre pour ce genre de travaux, du moins en termes de systèmes dynamiques.

Une étude plus approfondie des travaux de Fontana et Buss met également en lumière un autre problème, bien mis en évidence dans la conclusion de [FB94a] : "Thus, our experimental λ-reactor and the theory specific to it are only stepping stones towards a larger goal", ce but étant "an implementation independent theory of abstract functionnal organization".

Or les auteurs mettent ici le doigt sur quelque chose d'important : l'*organisation* est hors d'atteinte des systèmes dynamiques. En effet, les systèmes modélisés peuvent présenter de remarquables caractéristiques de réparation en cas de perturbations, voire même d'auto-organisation ; cependant, ces caractéristiques sont *méta*, elles ne sont observables que de l'extérieur du système[5]. Ainsi par exemple, les fameux *attracteurs* d'un système dynamique sont des caractéristiques de ce système, mais pas des objets du système étudié. Ce sont en quelques sorte des objets de second ordre.

Une des voies rencontrée dans la littérature pour pallier à ce problème est de "greffer" une couche logique sur la couche dynamique. On obtient ainsi les logiques temporelles telles qu'elles sont présentées dans [Woo97] par exemple. Il s'agit d'une logique dans laquelle on inclut des opérateurs temporels agissant sur les propositions avec des sémantiques du genre "Il est en tout temps vrai que..." ou "Il existe un temps où il est vrai que...". Cette approche présente cependant des faiblesses pour ce qui nous concerne : d'une part, l'aspect logique d'un système n'est pas tout à fait le même que son aspect structurel ; les logique temporelles ne proposent toujours pas un langage sur l'*organisation* d'un système. D'autre part, cette approche ne résout pas le problème de la variabilité de l'espace d'états.

Fontana et Buss, quant à eux, suggèrent à plusieurs reprises dans leurs travaux que la solution se trouve au niveau de l'algèbre : les structures algébriques seraient d'après eux à même de refléter quelque chose de l'organisation d'un système. C'est ainsi tout naturellement qu'on se tourne vers la théorie qui peut être vue comme la plus puissante et la plus générale de toute l'algèbre : la théorie des catégories.

3 Les catégories

3.1 La théorie

Une catégorie est une structure mathématique composée d'objets et de flèches, ces dernières devant pouvoir se composer de manière associative. Chaque objet doit en plus disposer d'une flèche dite "identité", élément neutre pour la composition. Un exposé détaillé de la théorie sortirait largement du cadre de ce texte. Ainsi, nous aborderons ici une discussion sur les particularités de la théorie des catégories sans entrer dans les détails formels. Nous renvoyons donc le lecteur intéressé à [Ami98] pour une présentation plus détaillée ou à [Lan71] pour les détails les plus fins. De plus, les principales notions utilisées dans ce texte sont très brièvement définies dans l'annexe A.

Au-delà des détails techniques qui permettent de déterminer si telle ou telle structure est ou non une catégorie, le point important à relever est qu'il s'agit d'une théorie *relationnelle* dans le sens suivant : les objets sont des "boîtes noires", et la seule information disponible est celle donnée par les *relations* qu'ils entretiennent par le biais des flèches.

---

machine abstraite "suited to model concurrent computations" dans un formalisme très proche des idées de Fontana et Buss.

Mais tous ces modèles se situent au niveau de la dynamique, et nécessitent un "couche" supplémentaire pour parler de la structure.

[5] On entrevoit déjà ici la problématique de la prise en compte de l'observateur que nous retrouverons au paragraphe 4.

Nous ne donnerons qu'un seul exemple, qui nous semble à la fois simple et éloquent, de cette philosophie : étant donnés deux ensembles A et B, on définit classiquement le produit cartésien $A \times B$ comme étant l'ensemble composé des paires (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$. L'approche catégorielle, elle, considère ces trois ensembles comme des "boîtes noires", et définit $A \times B$ comme l'ensemble qui vérifie la propriété suivante : pour tout ensemble C et toute paire de fonctions $f : C \to A$ et $g : C \to B$, il existe une unique fonction $h : C \to P$ vérifiant un système d'équations exprimé par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[d, dotted, "h"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
 & A \times B \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

où p_1 et p_2 sont les projections canoniques d'un produit sur ses composantes.

Cette définition, qui paraît au premier abord beaucoup plus compliquée[6], a l'avantage d'une beaucoup plus grande généralité : elle reste telle quelle pour définir le produit de deux nombres, deux groupes, deux espaces topologiques et pratiquement tout ce qu'un mathématicien nomme produit ! on peut même pousser plus loin, et définir de la même manière le produit de deux catégories !

On voit apparaître là une des caractéristiques les plus intéressantes des catégories : une catégorie pouvant elle-même être un objet d'une autre catégorie, le langage catégoriel s'applique à plusieurs niveaux à la fois, et il existe de nombreux exemples où ce procédé permet de projeter le métalangage dans le langage de la théorie (ainsi en est-il, par exemple, de la représentation du foncteur de sous-objet dans un topos)[7].

Il existe de nombreux concepts comparables au produit décrit ci-dessus, et dont la puissance expressive a incité certaines personnes à les utiliser en sciences cognitives. Ainsi en est-il des limites, de l'adjonction, des catégories de flèches, et de bien d'autres concepts. Nous y reviendrons plus en détail au prochain paragraphe.

Ainsi donc la théorie des catégories semble mieux armée que celle des systèmes dynamiques pour ce qui est de parler des structures. A l'inverse cependant, on lui reproche souvent de ne pas pouvoir prendre en compte la dynamique d'un processus. Il est vrai que peu de travaux en théorie des catégories proposent actuellement une modélisation très convaincante au niveau dynamique. Mais ceci n'est pas très étonnant si l'on pense que les personnes qui se tournent vers cette théorie le font souvent pour pouvoir mettre l'accent sur d'autres aspects que ceux qui se traitent bien avec les systèmes dynamiques...

Cependant, il serait hâtif d'en conclure qu'il s'agit là d'une faiblesse inhérente à la théorie. D. Luzeaux et J. Blanc-Talon proposent dans [LBT99] une liste des manières les plus prometteuses d'intégrer l'aspect dynamique à une modélisation catégorielle. Il s'agit chaque fois de choisir de manière adéquate les objets et les flèches de la catégorie ; voici en très bref les solutions qu'ils proposent :

1. Sur la base de l'espace d'états d'un système dynamique, prendre pour objets les états de cet espace et pour flèches la relation d'atteignabilité (c'est à dire qu'un flèche relie deux objets quand la transition du système entre ces deux objets est effectivement possible). (représentation de la structure des transitions du système)

2. Prendre pour objet les fonctions partielles continues définies sur un intervalle de temps et les relier par une flèche si l'on peut les "recoller" en une fonction continue (représentation des trajectoires possible du système).

[6]Pour les initiés, la définition se résume au diagramme ci-dessus, ce qui la rend aussi simple que la définition standard, voire même plus, étant donné son côté très visuel.

[7]En essence, il s'agit du même type de projection que la fameuse numération de Gödel : des énoncés *sur* la théorie sont projetés sur des objets *de* la théorie.

3. Prendre pour objets les espaces E_n des chaînes binaires finies de longueur n et pour flèches les injections standard (représentation du codage — éventuellement évolutif — que l'on fait des connaissances que l'on a sur le système). A la limite (au sens catégoriel strict !), on peut prendre pour objet l'espace de Cantor, et pour flèches ses endomorphismes continus.
4. Prendre pour objets des formules logiques, et comme flèches des règles de réécriture ou de déduction (on obtient ainsi un calcul de preuve).
5. Enfin, on peut prendre comme objets de base des faisceaux, ce qui représente une généralisation directe du point 1.

On voit donc qu'avec cette multitude d'outils, la théorie des catégories ne semble pas particulièrement à la traîne en ce qui concerne la modélisation dynamique. Il conviendra donc de développer cet aspect à l'avenir.

Notons encore que suivant le point de vue, une catégorie est simplement une structure algébrique comparable à un groupe ou un corps ; mais la théorie des catégories peut également être comprise comme une vision différente des mathématiques dans leur fondement même. Le paragraphe suivant permettra de voir quelques exemples de ces deux types d'approches.

3.2 État de l'art

Ce paragraphe propose un petit florilège de quelques travaux en IA ou en sciences cognitives utilisant les catégories. Sans être exhaustif, ce survol devrait permettre de mieux cerner quelles sont les caractéristiques de cette théorie qui ont inspiré les chercheurs de ce domaine.

3.2.1 Piaget et ses successeurs

Les premiers, à notre connaissance, a avoir proposé la théorie des catégories comme formalisme pour l'étude de la cognition sont Jean Piaget et ses collaborateurs. On trouvera dans [Pia90] leurs idées à ce sujet, qui ont ensuite été développées et précisées par [Bol95].

Ces travaux visent d'abord à une formulation catégorielle des concepts piagétiens de base (schèmes, assimilation et accommodation, dégagement d'invariants, ...). Ils se situent en-deçà de l'approche logique de la cognition et cherchent dans un deuxième temps à "remplir le trou" entre l'activité sensori-motrice et l'activité symbolique du sujet.

Pour la première partie du projet, c'est l'aspect relationnel des catégories qui est mis en avant : on part d'une catégorie non définie représentant *l'activité du sujet*, dont les objets et les flèches modélisent respectivement les objets, et les prémorphismes et morphismes[8] intervenant dans les schèmes du sujet. L'avantage de cette démarche est de pouvoir étudier à partir de là comment ces différentes composantes de l'activité psychologique du sujet peuvent se comporter, et ceci sans avoir à préciser la nature intrinsèque de ces notions. Cela permet, notamment, de parler des invariants en termes de *limites*, un des concepts centraux de la théorie des catégories.

Pour la suite, c'est un des développements de la théorie des catégories qui est utilisé, à savoir la théorie des topoi ; en effet, un topos possède à la fois un aspect algébrique, un aspect topologique et un aspect logique. Ainsi, de la description algébrique de son système, Boldini dérive des propriétés topologiques et logiques — proposant ainsi une piste pour l'étude de l'émergence du symbolique à partir d'une activité purement sensori-motrice.

3.2.2 Ehresmann et Vanbremeersch

Dans un autre domaine, les travaux de A.C. Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch méritent également une mention ici. Leur théorie des Systèmes évolutifs avec mémoire[9] s'exprime dans un formalisme entièrement catégoriel et propose une utilisation assez poussée de certains concepts importants de cette théorie (limites, fibrations, catégories de flèches, ...).

[8] Ces trois dernier termes étant à comprendre ici dans leur signification psychologique.

[9] cf. [Ami98] pour une présentation synthétique de cette théorie, ou [EV89], [EV91], [EV92], [EV93], [EV96] pour les détails.

Proposée dans le cadre de la formalisation du système neuronal, leur théorie prétend s'étendre à la modélisation de "systèmes naturels capables d'apprentissage" ([EV92]). C'est la puissance expressive des concepts cités plus haut, et particulièrement de celui de limite, qui a poussé ces auteurs vers le formalisme catégoriel. La limite est à nouveau utilisée dans ce cadre pour exprimer quelque chose comme "un objet dépendant d'objets plus simples mais ne se réduisant pas à eux".

3.2.3 Sallantin

Les deux approches ci-dessus présentent l'avantage d'être assez précises du point de vue formel, et permettent ainsi de bien interroger le formalisme catégoriel. Certains autres travaux, par contre, s'inspirent plus de l'esprit des catégories que de la théorie précise ; parmi ceux-ci, nous citerons les travaux de Jean Sallantin.

Celui-ci présente dans [Sal97] des applications originales de certains concepts catégoriels dans le domaine de la conception d'agents rationnels. Notamment, il utilise l'adjonction pour parler de notion telle que la *prédictibilité* ou l'*anticipation*[10]. Cette approche est encore assez informelle, mais elle devrait se préciser bientôt, en particulier par les travaux en cours de Dominique Luzeaux (communication personnelle).

3.2.4 Arzi-Gonczarowski et Lehmann

Les travaux ci-dessus utilisaient plutôt la théorie des catégories dans sa vision "fondement des mathématiques". D'autres travaux utilisent les catégories plus simplement comme structure algébrique et font de la théorie des catégories au même titre que de la théorie des groupes ou des graphes. Ces derniers nous intéressent moins ici, car ils permettent peut-être moins de mettre en évidence les forces particulières de la pensée catégorielle.

Parmi ceux-ci, citons tout de même [AGL98] qui propose une formalisation catégorielle de la perception artificielle et de la catégorisation qui peut en résulter. Pour ceci, les auteurs construisent une catégorie dont les objets sont des "perceptions" au sens suivant : une perception est un triple (E, I, r) où E représente le "monde extérieur objectif", I l'ensemble des *connotations* que le système peut avoir ("sombre", "415 Hz" ou autre élément de description) et r est une fonction de $E \times I$ dans un ensemble à trois valeurs dont la sémantique est "vrai", "faux" et "inconnu". Sur cette base, les auteurs développent une théorie de classification des perceptions avec quelques résultats intéressants. Cependant, leur point de vue très réaliste — basé sur l'existence d'un monde extérieur perçu comme tel par le robot dès le début — est trop éloigné de notre problématique pour que leurs résultats nous soient vraiment utiles.

Il paraît néanmoins important de suivre l'évolution de ces travaux qui visent à moyen terme, selon Arzi-Gonczarowski (communication personnelle), à "formaliser autant d'aspects que possible de la cognition perceptive et de fournir ainsi des fondations standard pour les aspects pertinents de l'IA".

3.3 Synthèse

Ce survol de la littérature nous permet tout d'abord de tirer quelques conclusions sur les forces et les faiblesses de la théorie des catégories dans notre domaine.

Celle-ci semble en effet présenter des avantages indéniables, dont les principaux sont les suivants :

1. Il s'agit d'une théorie profondément relationnelle, ce qui est intéressant dans un cadre où tout un réseau informel de concepts est déjà en place, et où l'on en cherche une formalisation. En effet, dans un premier temps, une représentation formelle de ce réseau conceptuel sous forme de catégories peut fournir un bon début de formalisation.

[10] Intuitivement, on peut résumer l'idée de Jean Sallantin de la manière suivante : si A, B sont des catégories et $F : A \to B$, $G : B \to A$ des foncteurs, la catégorie de flèche $(A \downarrow G)$ peut être vue comme la représentation que A se fait de sa communication G avec B (de même pour $(F \downarrow B)$). Alors l'isomorphisme entre $(A \downarrow G)$ et $(F \downarrow B)$ exigé par l'adjonction signifie que A et B sont "suffisamment d'accord" sur leur protocole d'échange pour assurer la prédictibilité des échanges...

2. Corollaire de ce premier point : dans une formalisation catégorielle, l'accent est mis sur la structure relationnelle des objets étudiés plus que sur la liste de leurs composantes. En effet, le réseau conceptuel une fois formalisé, il est possible *dans un deuxième temps* de constater que la catégorie obtenue est isomorphe, par exemple, à telle sous-catégorie de la catégorie des ensembles. On déduit donc en quelque sorte une *implantation* particulière de nos concepts sur la base de leur *spécification* formelle.
3. La puissance de certains concepts catégoriels semble répondre à des besoins au niveau de l'expressivité. Parmi ceux-ci, la notion de limite semble avoir déjà trouvé une place privilégiée.
4. L'aspect *unificateur* de cette théorie, qui permet de faire se rencontrer les aspects topologiques, logiques et algébriques d'un objet donné, pourrait permettre de faire apparaître des propriétés de type logique sur un système construit de manière structurelle, comme c'est le cas dans les travaux de Boldini. Cela pourrait réconcilier les approches de type computationnelles et les approches plus structurelles.

Cependant, les catégories ont un certain nombre de faiblesses par rapport aux formalisations plus classiques. On relèvera particulièrement :

1. D'abord et avant tout, la question de la dynamique. Divers travaux ont montré la puissance de la théorie pour prendre des "instantanés" du système, mais s'il n'est pas possible d'aborder proprement la question de la dynamique, il est à craindre que ces instantanés ne soient relativement inutiles...
2. La prédictivité. Il est important de garder à l'esprit qu'une belle théorie descriptive reste au fond d'un tiroir, alors qu'une théorie branlante et prédictive est plus facilement utilisée. Pour l'instant, la plupart des utilisations de la théorie des catégories en sciences cognitives sont purement descriptives.

On constate également que plusieurs des travaux existants touchent à des domaines relevant de l'émergence, dans un sens assez imprécis du genre "un objet d'ordre supérieur, résultant de l'interaction entre des objets d'ordre inférieur, mais sans s'y réduire". Ainsi en est-il par exemple des invariants de Boldini ou des "recollements de patterns" de Ehresmann et Vanbremeersch.

Or, comme annoncé au paragraphe 1, la question de l'émergence et les question connexes s'intègrent tout naturellement dans notre problématique. Nous allons donc y consacrer le paragraphe suivant.

4 L'émergence et les liens entre théories

4.1 Problématique

Nous avons exprimé à la figure 1 la dualité dynamique/structurelle des phénomènes que nous cherchons à modéliser. Le côté dynamique, comme nous l'avons vu au paragraphe 2, est assez bien maîtrisé et on dispose d'excellents outils pour son étude. La modélisation de l'aspect structurel, par contre, a encore du chemin à faire. Nous avons cependant évoqué au paragraphe 3 des pistes pour aborder ce problème à l'aide de l'algèbre, et particulièrement de la théorie des catégories.

Cependant, dans l'état actuel des choses, il est peu probable qu'une formalisation unique parvienne à rendre pleinement la dualité des systèmes étudiés. Les outils dynamiques semblent manquer d'expressivité au niveau structurel, et la théorie des catégories semble mal adaptée pour parler de dynamique.

Ainsi, il serait bon de réfléchir, parallèlement au développement d'un langage structurel, à des outils permettant de travailler simultanément avec plusieurs formalisations du même phénomène ; il serait ainsi possible de réunir les forces des différents points de vue adoptés pour une meilleure maîtrise des systèmes modélisés.

Par exemple, on aurait tendance à dire que la structure "émerge" de la dynamique. Mais qu'est-ce que cela veut dire exactement ? Une brève réflexion montre que la réponse est loin d'être évidente. Nous allons donc nous intéresser maintenant de plus près à la situation où deux formalismes différents rendent compte du même phénomène. À moyen terme, nous nous intéresserons naturellement plus particulièrement au cas où l'un de ces “points de vue” décrit la dynamique fine et locale, et où l'autre “point de vue” décrit les structures à plus grande échelle qui en découlent. Dans ce cas, nous utiliserons les termes “local” ou “micro” pour parler du premier point de vue et les termes “global” ou “macro” pour le second.

4.2 État de l'art

4.2.1 Relecture de cas classiques

Il y a en tout cas deux domaines de la sciences ou cette problématique de double description locale/globale a déjà trouvé un cadre formel : la physique et les mathématiques. Commençons donc par voir si ces solutions peuvent nous intéresser.

La physique Pour tous les phénomènes physiques qui s'expriment en termes de calcul différentiel, la physique possède d'excellents outils pour étudier les phénomènes à différents niveaux. Ainsi, les équations différentielles — lorsqu'elles sont solubles — permettent un passage d'une description locale (interactions, p.ex. force gravifique) à une description globale (équations du mouvement, p. ex.).

Cependant, ces outils ne se laissent pas facilement transposer au cas où les deux niveaux ont des ontologies radicalement différentes : ça marche bien tant que l'on arrive à exprimer les deux dynamiques à peu près dans les mêmes termes. Ainsi dans l'exemple de la gravité, les forces gravifiques au niveau micro s'expriment dans le même espace que les équations du mouvement du niveau macro (généralement un espace vectoriel réel de dimension n). Il est difficile d'imaginer appliquer ce type de méthode dans un cas où l'expression formelle des deux niveaux est radicalement différente...

Les mathématiques Les mathématiques ayant explosé en de nombreux domaines dans la première moitié de ce siècle, les mathématiciens ont commencé à ressentir le besoin de jeter des ponts entre différentes théories. C'est ainsi qu'ils ont commencé à chercher un point de vue algébrique sur des objets topologiques, par exemple.

C'est précisément de cette problématique là que la théorie des catégories est née. Contrairement au cas de la physique, cette approche-ci sert justement à changer d'espace d'expression en passant d'un point de vue à l'autre.

Prenons un exemple. La donnée d'une topologie sur un espace donne des informations sur sa structure “fine” à petite échelle, pour traiter des questions telles que la convergence ou la continuité (niveau micro). Mais étant donnés deux espaces topologiques, il est généralement assez difficile de déterminer si, globalement, ils sont isomorphes. Pour traiter ce “niveau macro”, on fait correspondre à chacun des espaces topologiques une série de structures algébriques[11] qui permettent (partiellement) de répondre à la question.

Ainsi la théorie des catégories pourrait proposer des pistes intéressantes pour étudier des phénomènes à différents niveaux dont les expressions diffèrent.

4.2.2 Travaux réalisés dans l'équipe CASCAD

Les travaux de l'équipe dans ce sens se sont pour l'instant centrés essentiellement sur le problème de l'émergence. Ce concept est un peu flou et assez polysémique dans la communauté scientifique. Il est apparu au milieu du siècle passé en Grande-Bretagne (J.S. Mill, A. Bain, S. Alexander, C.D. Broad, ...) pour lutter à la fois contre le *vitalisme* et contre le *réductionnisme physicaliste*. Il a ensuite fait l'objet d'étude de plusieurs philosophes (M. Bunge, J. Searle, ...), mais cette notion n'a pas encore trouvé d'interprétation consensuelle.

Miriam Scaglione propose dans [Sca96] une étude assez poussée du concept d'émergence. En plus d'une approche historique complète, on trouve une réflexion sur les aspect contemporains du

[11] Au niveau formel, il s'agit là des foncteurs $\mathbf{TOP} \to \mathbf{GRP}$ de la catégorie des espaces topologiques dans celles des groupes qui font correspondre à chaque espace topologique son $n$ième groupe d'homotopie.

problème, et la tentative d'une définition formelle de l'émergence comme étant l'inverse, au sens mathématique, de la réalisation. Malheureusement, ce travail n'est pas suffisamment formel pour fournir une définition opérationnelle de ce concept.

La réflexion a été ensuite poursuivie par J.-P. Müller, et publiée dans [Jea97] et [Mül98]. Müller propose maintenant une définition préformelle en 4 points :

On parle d'émergence lorsque

1. On a un ensemble d'entités en interaction entre elles et avec un environnement dont la dynamique s'exprime dans une théorie D.
2. Cette dynamique produit un phénomène global (structure stable, trace d'exécution ou autre forme d'invariant).
3. Ce phénomène n'est pas compositionnel à partir des propriétés individuelles des entités (ou positivement : ce phénomène dépend au moins en partie des relations entre ces entités).
4. Le phénomène global est observé via un médium d'inscription et décrit en termes d'une théorie D' distincte de D. Si l'observateur est hors du système décrit, on parle d'*émergence faible* ; si au contraire l'observateur est intérieur au système, on parle d'*émergence forte*.

Par exemple, le comportement des fourmis d'une fourmilière peut être décrit en termes locaux de suivi de gradient de phéromones et de nourriture, etc. (théorie D). Mais ces interactions locales provoquent l'apparition, dans un milieu donné, de chemins très fréquentés entre le nid et une source de nourriture. Or ces chemins ne peuvent pas être produits par une fourmi isolée, et ils peuvent être décrits en termes topologiques (théorie D'). Ainsi, une formalisation globale du fonctionnement d'une fourmilière en termes de chemins peut être caractérisée d'émergente par rapport à la formalisation locale en termes de suivis de gradients.

Ainsi, l'émergence devient une notion relative aux théories que l'on a sur les phénomènes étudiés. Ceci fournit une formulation beaucoup plus précise et maîtrisée que la plupart de celles que l'on trouve dans la littérature[12].

Il est probable que pour obtenir une bonne définition de l'émergence, il faille aussi étudier de près les notion très liées de survenance, réalisation et réduction. Müller propose une représentation schématique des liens entre ces différentes notions (cf. figure 2). Si cette représentation permet d'assez bien rendre compte de la signification de ces notions, la formulation précise de ces définitions résiste encore.

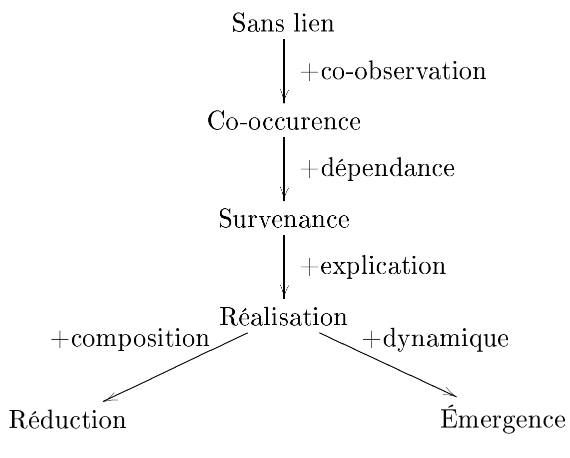

FIG. 2: L'émergence et les notions connexes, d'après Müller

[12]Il est à noter que la définition ci-dessus ne recouvre qu'une partie de la signification courante du terme "émergence" ; en particulier, elle ne tient pas compte de l'émergence *dans le temps*, c'est à dire de l'apparition d'une nouvelle entité au cours d'une dynamique. C'est donc une vision plus structurelle que dynamique...

En effet, lorsqu'on veut formaliser ces définitions, on se heurte vite à un problème : l'expression des théories D et D' suppose l'existence d'un observateur qui impose un "filtre" sur la "réalité" pour ne retenir à chaque niveau que les aspects qui l'intéressent. Ceci suppose donc l'existence d'un phénomène non formalisé, et de plusieurs "points de vue" sur ce phénomène.

Mais il est très délicat de formaliser ceci, puisque justement le phénomène existe en dehors de toute formalisation... Il existe donc deux voies pour essayer de se sortir de ce problème :

1. On suppose l'existence d'une formalisation "élémentaire" et "neutre" F qui permet d'englober la totalité du phénomène étudié. Les théories D et D' ne sont alors que des théories dérivées de cette "théorie de base" F.
2. On suppose que l'on a accès au phénomène qu'à travers des théories partielles. La question de l'émergence devient alors une question sur les relations entre les théories elles-mêmes.

La première solution est une forme de réductionnisme. C'est une approche assez traditionnelle si F est la physique. Ainsi, les théories D et D' ne sont que des commodités de discours, nullement indispensables en essence. Or même si cela s'avérait être le cas, on connaît les problèmes rencontrés par ce genre d'approche : les formulations deviennent vite si complexe qu'elle ne sont plus d'aucune utilité pratique, ni même théorique[13].

Quant à la deuxième voie, elle est assez délicate, puisqu'elle suppose un changement d'approche au niveau épistémologique. Cependant, une partie du chemin pourrait bien avoir déjà été faite par d'autres, et en particulier par les travaux de Mioara Mugur-Schächter (cf. ci-dessous).

4.2.3 Travaux réalisés ailleurs

Ces questions sur l'émergence et les formalisations en général ont bien sûr donné naissance à une abondante littérature dans des domaines tels que la philosophie ou l'épistémologie. Mais certains scientifiques s'y sont aussi intéressés, et ceci donne des travaux souvent plus formels et plus proches de notre problématique. C'est donc plutôt de ce côté-là que nous nous tournerons.

Nous citerons dans ce paragraphe deux travaux actuellement en cours, et sur lesquels il est par conséquent difficile d'avoir un avis synthétique et définitif. Il est cependant d'ores et déjà intéressant de constater que tous deux s'intéressent à la théorie des catégories comme formalisme pour exprimer leurs modèles.

Pierre Basso Pierre Basso propose une "théorie de la participation" pour expliquer les phénomènes émergents (cf. p.ex. [Bas99]). L'idée est que les objets portent autour d'eux des "champs de participation", non observables directement, mais dont les interactions produisent les phénomènes habituellement qualifiés d'émergents. Basso propose par exemple une application au traitement du langage naturel.

Or cette formalisation se fait en termes de théories des topoi, qui est une forme évoluée de théorie des catégories. Selon l'auteur, seule cette théorie possède la puissance expressive dont il a besoin (communication personnelle). Notamment, la souplesse des topoi dans leurs rapports avec les logiques intuitionnistes semble être d'une grande importance.

Le CeSEF Le Centre pour la Synthèse d'une Épistémologie Formelle, à Paris, travaille comme son nom l'indique à la conception d'une théorie de la conceptualisation. Ce centre est dirigé par Mioara Mugur-Schächter, qui développe depuis des années une "Méthode de Conceptualisation Relativisée" (MRC). Cette théorie, qui pose l'observateur humain finalisé comme élément premier de toute conceptualisation, va tout à fait dans le sens des réflexions exposées ci-dessus. On trouvera une rapide présentation des idées directrices de cette théorie dans [MS99b]. À la lecture de ce texte, il est frappant de constater la convergence de problématique avec les considérations ci-dessus. En effet, on a aussi là à faire à un objet *non conceptualisé* que l'observateur va "détacher" du monde

[13] En théorie, toutes les mathématiques se réduisent à la théorie des ensembles, c'est à dire essentiellement à la logique mathématique munie du prédicat binaire $\in$. Mais on sait qu'une réduction des théorèmes de l'analyse en termes purement ensemblistes est pratiquement inatteignable.

qui l'entoure et observer selon un certain protocole, ceci lui permettant *ensuite* d'établir une description, formelle ou non, de l'objet en question.

Du point de vue formel, l'auteur a choisi jusqu'à maintenant la voie du formalisme spécifique, qui a l'avantage de correspondre exactement à ses besoins, mais le désavantage d'être — selon ses propres termes — socialement isolant. Mais dans un papier à paraître ([MS99a]), Mugur-Schächter propose une réexposition de sa théorie, maintenant exprimée en termes de catégories.

Il est encore trop tôt pour dire si ce nouveau formalisme sera concluant pour cette entreprise, mais il est déjà intéressant de constater qu'une fois de plus, les catégories interviennent dans ce domaine.

4.3 Perspectives

Il pourrait sembler que les questions épistémologiques soulevées dans ce paragraphe sont bien éloignées de la problématique exposée au paragraphe 1 ; cependant, un peu de réflexion montre qu'une bonne compréhension de ces problèmes de *points de vue* est tout à fait centrale à l'activité de l'équipe. Examinons cela de plus près pour les deux axes d'applications séparément.

En ce qui concerne la robotique, la possibilité de travailler simultanément avec plusieurs théories fournissant des points de vue différents permettrait des ouvertures dans trois directions complémentaires :

1. La multimodalité : lorsqu'un robot perçoit un obstacle simultanément avec, disons, un sonar et un capteur infra-rouge, il n'est pas évident de combiner ces données de manière adéquate. Or cette question n'est rien d'autre que la relation entre deux points de vue formalisés dans le robot sur un objet extérieur, non accessible formellement au robot lui-même. Notons que dans ce cas-là, le concepteur du robot a accès à une théorie "globale" F comme évoqué au paragraphe 4.2.2. Vouloir donner au robot l'accès à cette théorie globale correspond à l'approche représentationaliste ; celle-ci résulte, au niveau de la fusion multi-capteurs, en la projection de toutes les données capteurs dans un espace commun. Notre approche pourrait proposer une alternative intéressante en évitant cette projection, et en étudiant directement l'articulation entre ces différentes données.
2. La spécification du comportement : Nous cherchons à créer des SLM dont l'interaction avec l'environnement produit un comportement donné. Mais les termes utilisés pour parler de la programmation d'une part (théorie D, de type "actionner les moteurs", "lire les valeurs des capteurs", ...) et du comportement d'autre part (théorie D', de type "ouvrir la porte", "fuir", "apporter un café") sont généralement radicalement différents. De plus, les relations entre ces théories n'ont rien de clair : s'il est évident que le comportement dépend de la programmation, cette dépendance est loin d'être formalisée de manière satisfaisante...
3. La maîtrise des effets de bord : Nous avons relevé au paragraphe 1 que la distinction entre niveau "physique" et niveau "informationnel" ou "logiciel" est essentiellement une question de point de vue. En effet, un état physique (p.ex. un robot butant contre un mur) peut très bien être vu comme un état informationnel ("je suis à une distance nulle du mur"). Mais la forte distinction habituellement faite entre ces niveaux empêche généralement une utilisation efficace de ce genre de double point de vue. De fait, ce type d'information est pour ainsi dire jamais utilisé actuellement[14]. Il est donc temps de se donner des outils pour penser l'articulation entre ces différents niveaux de description.

Dans le domaine des systèmes multi-agents, la connexion devrait apparaître encore plus clairement. En effet, la multiplicité des points de vue est un élément définitoire de tels systèmes ; ainsi, une bonne compréhension des mécanisme en jeu dans un tel système fera sans doute intervenir des considérations sur les points de vue et la manière de les relier. De plus, de par leur nature même, les SMA peuvent vraisemblablement fournir une bonne plate-forme d'essai pour des questions concernant la multiplicité des points de vues.

[14]Sauf dans le cas où la situation physique est explicitement transformée par l'algorithme en une donnée informationnelle ("si le retour d'effort est trop grand, je suis à une distance 0 du mur").

5 Conclusions

Le développement d'un cadre conceptuel formalisé pour l'activité de l'équipe CASCAD se décompose, nous l'avons vu, en trois parties :

1. Le développement d'un langage dynamique permettant de décrire l'interaction, sans cesse en changement, d'une SLM avec son environnement.
2. Le développement d'un langage structurel permettant de spécifier le comportement désiré d'une part, et d'autre part d'étudier les structures stables qui résultent de l'interaction évoquées au premier point et qui correspondent à ces comportements.
3. Le développement d'une méthode de travail permettant de tirer parti simultanément des deux points de vues évoqués ci-dessus.

Le paragraphe 2 nous a permis de voir que le premier point est déjà partiellement résolu. Le langage dynamique existe et est très performant ; il ne reste qu'à l'utiliser à bon escient dans le cadre de nos travaux. Mais le choix des aspects pertinents à inclure dans un tel modèle dynamique dépend bien entendu des deux autres points.

Or les points 2. et 3. sont beaucoup moins avancés ; il n'existe que peu de littérature sur ces sujets, et il est clair qu'il n'existe pas encore, pour ces types de problématique, de solution "clé en main" comme pour l'aspect dynamique. C'est donc particulièrement sur ces deux points que nos efforts doivent maintenant se concentrer.

Au niveau structurel, il s'agira donc de spécifier plus précisément quelles sont les structures que nous désirons modéliser, afin de sélectionner des objets mathématiques aptes à les représenter. Il y a de fortes présomptions, nous l'avons vu, pour que ces objets soient algébriques. La théorie des catégories, proposant dans son arsenal de concepts la quintessence des notions algébriques courantes, pourrait proposer un cadre unifié pour parler de différents types de structures.

Pour ce qui est du troisième point, il nous semblerait judicieux de creuser à fond les développements théoriques du CeSEF pour étudier une éventuelle applicabilité de ces concepts à nos travaux. En effet, l'analyse superficielle que nous avons réalisée pour l'instant révèle une convergence de problématique très importante, particulièrement entre la MRC de Mioara Mugur-Schächter et nos questions ouvertes sur l'émergence et ses notions connexes. De ce fait, il paraît probable que la théorie des catégories soit aussi le langage adopté pour cette partie-là de notre projet.

Enfin, au vu de ce qui précède, il semblerait profitable, en plus du programme évoqué ci-dessus, de développer encore les compétences de l'équipe pour ce qui est des connaissances purement catégorielles. Il s'agirait de creuser dans les domaines non traités par [Ami98], et plus particulièrement :

1. Les finesses de la théorie des topoi (liens avec la logique, avec la topologie, etc.).
2. L'utilisation de la théorie des catégories comme instrument de spécification structurelle (particulièrement la théorie des esquisses, cf. [BW90]).
3. Les possibilités d'expression d'une dynamique (faisceaux, fibrations, etc. cf. [LS86] p.ex.).

Remerciements

Les réflexions exposées ci-dessus résultent en grande partie des lectures que j'ai effectuées cette année, et dont on trouvera la liste dans la bibliographie ci-après. Mais la matière ainsi accumulée n'a pu prendre la forme exposée dans ce texte que par les interaction fructueuse que j'ai pu avoir avec de nombreuses personnes, et en particulier avec Z. Arzi-Gonczarowski, A. Ehresmann, G. Henriquès, D. Luzeaux, Mioara Mugur-Schächter, J. Sallantin, les conférenciers de OMCAS ainsi bien sûr que les membres de l'équipe CASCAD. Je tiens ici à les remercier tous sincèrement de leur disponibilité et de leur aide.

L'occasion qui m'a été offerte de co-organiser le séminaire OMCAS[15] m'a également été très profitable, et je tiens à en remercier le troisième cycle romand d'informatique.

[15]Acronyme de "Operational Models of Complex Adaptive Systems", séminaire tenu à Neuchâtel les 10 et 11 décembre 1998 sous l'égide du Troisième cycle romand d'informatique (cf. http ://iiun.unine.ch/Events/Conferences/Omcas.html pour les détails).

A Glossaire catégoriel

Adjoint Soient C, D des catégories et $F : C \to D, G : D \to C$ des foncteurs.On dit que F est l'adjoint à gauche de G — et que G est l'adjoint à droite de F — s'il existe un isomorphisme Φ entre les catégories de flèches $(C \downarrow G)$ et $(F \downarrow D)$ faisant correspondre à toute flèche de la forme $A \to G(B)$ une flèche de la forme $F(A) \to B$.

Catégorie Une catégorie est un graphe C muni de deux fonctions supplémentaires $\mathrm{id} : C_0 \to C_1$ et $\circ : C_2 \to C_1$, le tout vérifiant les axiomes suivants[16] :

Composition	$\mathrm{source}(g \circ f) = \mathrm{source}(f)$ et $\mathrm{but}(g \circ f) = \mathrm{but}(g)$.
Associativité	$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ chaque fois que l'un des côté est défini.
Identité-1	$\mathrm{source}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{but}(\mathrm{id}_A) = A$ pour tout $A \in C_0$.
Identité-2	Pour $f : A \to B$ on a $f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f$.

Catégorie de flèches Soient C, D, E des catégories et $F : D \to C, G : E \to C$ des foncteurs. Une flèche de F vers G est une flèche de la forme $f : F(d) \to G(e)$. Une transformation de flèches de $f : F(d) \to G(e)$ à $f' : F(d') \to G(e')$ est une paire de flèches $k : d \to d'$ et $h : e \to e'$ telle que le diagramme suivante commute :

$$\begin{tikzcd} F(d) \arrow[r, "F(k)"] \arrow[d, "f"'] & F(d') \arrow[d, "f'"] \\ G(e) \arrow[r, "G(h)"'] & G(e') \end{tikzcd}$$

La catégorie de flèches $(F \downarrow G)$ a pour objets les flèches de F vers G et pour flèches les transformations de flèches dans le sens défini ci-dessus. Lorsque F ou G est le foncteur identité, on note plutôt $(C \downarrow G)$ ou $(F \downarrow C)$.

Cône Soient I et C des catégories. Soient $K : I \to C$ un foncteur constant et $D : I \to C$ un diagramme (donc un foncteur quelconque). Un cône dans C de base F et de sommet K est une transformation naturelle de K dans F. Pour I, C et F donnés, on peut munir l'ensemble des cônes d'une structure naturelle de catégorie appelée *catégorie des cônes de base F dans C (cf. [Ami98] pour les détails).*

Diagramme Soient I, C des catégories. Un diagramme D dans C de forme I est un foncteur $D : I \to C$. Le diagramme D est qualifié de *commutatif* si la restriction de D à son image est un isomorphisme de catégories[17].

Foncteur Soient C et D des catégories. Un foncteur F est composé d'une paire de fonctions $F_i : C_i \to D_i$, $i = 1, 2$ vérifiant les axiomes suivants :

Localisation	Pour $f : A \to B$ on a $F_1(f) : F_0(A) \to F_0(B)$.
Identité	Pour tout $A \in C_0$ on a $F_1(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F_0(A)}$.
Composition	Si $g \circ f$ est défini dans C, alors $F_1(g \circ f) = F_1(g) \circ F_1(f)$.

Un foncteur $F : C \to D$ est dit *constant* si tous les objets de C sont envoyés par F sur le même objet A de D et toutes les flèches de C sur id_A .

[16] Pour simplifier les notations, on notera id_A pour $\mathrm{id}(A)$ et $f \circ g$ pour $\circ(f, g)$.

[17] Cette définition de la commutativité est un tout petit peu plus restrictive que la définition standard, mais beaucoup plus courte à exprimer.

La notion de foncteur permet de parler de catégorie de catégories, les objets en étant des catégories et les flèches des foncteurs.

Graphe Un graphe G est défini par deux ensembles G_o (les *Objets*) et G_1 (les *flèches*) et deux fonctions source, but : $G_1 \to G_0$. On abrège souvent la formule source$(f) = A \wedge$ but$(f) = B$ par $f : A \to B$. De plus, nous noterons G_2 l'ensemble des chemins de longueur 2 dans G, c'est à dire $G_2 = \{(g, f) \mid g, f \in G1 \wedge \text{but}(g) = \text{source}(f)\}$.

Isomorphisme Soient C une catégorie et $f : A \to B$ une flèche de C. f est un isomorphisme s'il existe $g : B \to A$ avec $f \circ g = \text{id}_B$ et $g \circ f = \text{id}_A$. On écrit alors $f = g^{-1}$ et on dit que g est l'*inverse* de f.

Limite Soient C une catégorie et D un diagramme de C. Si la catégorie des cônes de base D dans C admet un objet terminal, celui-ci est appelé limite de D.

Représentable (foncteur —) Pour une catégorie C et un objet A de C, le foncteur $\text{Hom}(A, -) : C \to SET$ envoie chaque objet B de A sur l'ensemble des flèches $A \to B$[18].

Soit C une catégorie et $F : C \to SET$ un foncteur. S'il existe un objet A de C tel que F est naturellement isomorphe à $\text{Hom}(A, -)$, on dit que F est représentable, et que A représente F.

Terminal (objet —) Un objet terminal T d'une catégorie C est un objet tel que pour tout objet O de C il existe exactement une flèche $O \to T$.

Topos Il serait trop long de donner une définition précise de la notion de topos ici. On peut dire qu'il s'agit d'une catégorie contenant

1. la limite de tous ses diagrammes ;
2. tous ses "objets exponentiels", comparables dans la catégorie des ensembles aux ensembles de toutes les fonctions entre deux ensembles ;
3. un "classificateur de sous-objet", comparable à l'ensemble $W = \{\text{vrai}, \text{faux}\}$ de la catégorie des ensembles qui permet de désigner un sous-ensemble S d'un ensemble E par la fonction $\chi_S : E \to W$ définie par $f(s) = \text{vrai}$ si $s \in S$ et faux sinon.

Cette structure donne à un topos une expressivité égale à celle d'une logique intuitionniste. On peut aussi voir un topos comme une généralisation d'un espace topologique (cf. [Vic95], [Vic96]).

Transformation naturelle Soient C, D des catégories et $F, G : C \to D$ des foncteurs. Une transformation naturelle $\alpha : F \to G$ est une famille de flèches $\alpha A : F(A) \to G(A)$ indexée par les objets A de C telle que pour toute flèche $f : A \to B$ de C le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha A"'] & F(B) \arrow[d, "\alpha B"] \\
G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

La notion de transformation naturelle permet de parler de catégorie de foncteurs, les objets en étant des foncteurs et les flèches des transformations naturelles. Il est d'usage dans une telle catégorie de parler d'*isomorphisme naturel* au lieu d'*isomorphisme*.

[18] Pour être complet, il faut aussi définir ce foncteur sur les flèches de C : chaque flèche f est envoyée sur la fonction $f \circ -$ de composition avec f.

Références

[Adl94] Leonars M. Adleman. Molecular Computation of Solutions to Combinatorial Problems. *Science*, 266 :1021–1024, November 1994.

[AGL98] Z. Arzi-Gonczarowski and D. Lehmann. Introducing the Mathematical Category of Artificial Perceptions. À paraître dans *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 1998.

[Ami98] Matthieu Amiguet. Introduction à la théorie des catégories. Travail de diplôme de l'Université de Neuchâtel, 1998.

[Ass99] Association pour la Recherche Cognitive. *Conflits des interprétations et interprétation des conflits*. Ecole nationale supérieure des télécommunications, February 1999. Actes Journées de Rochebrune 1999.

[Bas99] Pierre Basso. Sense as an emergent phenomenon. The theory of participation. Soumis à IJCAI99, 1999.

[BB92] Gérard Berry and Gérard Boudol. The chemical abstract machine. *Theoretical Computer Science*, 96 :217–248, 1992.

[BDE94] W. Banzhaf, P. Dittrich, and B. Eller. Self-organization in a system of binary strings. In R. Brooks and P. Maes, editors, *Artificial Life IV*, pages 109–118. MIT Press, 1994.

[BF91] Richard J. Bagley and J. Doyne Farmer. Spontaneous Emergence of a Metabolism. In C. G. Langton, C. Taylor, J. D. Farmer, and S. Rasmussen, editors, *Artificial Life II*, volume X of *SFI Studies in the Sciences of Complexity*, pages 93–140. Addison-Wesley, 1991.

[Bol95] Pascal Boldini. *Contributions de la Théorie des Catégories à la Représentation des Connaissances*. PhD thesis, Université de Rennes I, February 1995.

[BW90] Michael Barr and Charles Wells. *Category Theory for Computing Science*. Prentice Hall International, 1990.

[Def92] Guillaume Deffuant. *Réseaux connexionnistes auto-construits*. PhD thesis, CEMAGREF, Antony, June 1992.

[Emm94] Claus Emmeche. The computational notion of life. *Theoria – Segunda Epoca*, 9(21) :1–30, 1994.

[EP79] M. Eigen and P.Schuster. *The Hypercycle. A Principle of Natural Self-Organization*. Springer-verlag, 1979.

[EV89] A.C. Ehresmann and J.-P. Vanbremeersch. Modèle d'interaction dynamique entre un système complexe et des agents. *Revue Internationale de Systémique*, 3(3) :315–341, 1989.

[EV91] A.C. Ehresmann and J.-P. Vanbremeersch. Un modèle pour les systèmes évolutifs avec mémoire, basé sur la théorie des catégories. *Revue Internationale de Systémique*, 5(1) :5–25, 1991.

[EV92] A.C. Ehresmann and J.-P. Vanbremeersch. Outils mathématiques pour modéliser les systèmes complexes. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle*, XXXIII :225–236, 1992.

[EV93] A.C. Ehresmann and J.-P. Vanbremeersch. Rôle des contraintes structurales temporelles dans les systèmes complexes. In *Systémique et cognition*, pages 103–112, Versailles, June 1993. Premier congrès biennal de l'association française des sciences et technologies.

[EV96] A.C. Ehresmann and J.-P. Vanbremeersch. Multiplicity principle and emergence in memory evolutive systems. *Journal of Systems Analysis, Modelling, Simulation*, 26 :81–117, 1996.

[FB94a] Walter Fontana and Leo W. Buss. "The Arrival of the Fittest" : Toward a Theory of Biological Organization. *Bull. Math. Biol.*, 56 :1–64, 1994.

[FB94b] Walter Fontana and Leo W. Buss. What would be conserved if "the tape were played twice". *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 91 :757–761, 1994.

[FB96] Walter Fontana and Leo W. Buss. The barrier of objects : From dynamical systems to bounded organizations. In J. Casti and A. Karlqvist, editors, *Boundaries and Barriers*, pages 56–116. Addison-Wesley, 1996.

[FK97] Chikara Furusawa and Kunihiko Kaneko. Emergence of Differentiation Rules leading to Hierarchy and Diversity. *?*, pages 172–181, 1997.

[FMS79] M.P. Fourman, C.J. Mulvey, and D.S. Scott, editors. *Applications of Sheaves*. Springer-Verlag, 1979.

[Fon97] Walter Fontana. The Computational World-View : On the Emergence of Organization. In *Emergence, Entropy and the crative universe*, pages 207–222, Institut Kurt Bösch, Sion (CH), October 1997. Conseil Suisse de la Science.

[Hün98] Harald Hünning. An approach to Learning in Autocatalytic Sets in Analogy to Neural Network. Disponible à l'adresse http ://www.ee.ic.ac.uk/research/neural/students/harry.html, 1998.

[Jea97] M.R. Jean (nom collectif). Émergence et SMA. In *Journées Francophones IAD et SMA*, Nice, 1997.

[Lan71] Saunders Mac Lane. *Category theory for the working mathematician*. Springer-Verlag, New York, 1971.

[LBT99] Dominique Luzeaux and Jacques Blanc-Talon. Contrôle de systèmes complexes. Technical Report CTA 99 R 084, DGA, Arcueil, July 1999.

[LS86] F.W. Lawvere and S.H. Schanuel, editors. *Categories in Continuum physics*. Number 1174 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1986.

[Lui98] Pier Luigi Luisi. About various definitions of life. *Origins of Life and Evolution of The Biosphere*, 28 :613–622, 1998.

[Mül98] Jean-Pierre Müller. Vers une méthodologie de conception de systèmes multi-agents de résolution de problèmes par émergence. In *Systèmes multi-agents, de l'interaction à la socialité*, pages 355–371. Journées Francophones IAD et SMA, Hermes, 1998.

[MR94] F. Magnan and G.E. Reyes. Category theory as a conceptual tool in the study of cognition. In J. Macnamara and G.E. Reyes, editors, *The Logical Foundations of Cognition*, pages 57–90. Oxford University Press, 1994.

[MS99a] Mioara Mugur-Schächter. A "Legalisation" of the descriptions : The method of relativized conceptualization. Â paraître l'année prochaine dans *Foundations of Science*, 1999.

[MS99b] Mioara Mugur-Schächter. Objectivité, relativités, relativisme. À paraître dans un volume collectif des Presses Universitaires de France, 1999.

[MV97] Barray McMullin and Francisco J. Varela. Rediscovering Computational Autopoiesis. In *Fourth European Conference on Artificial Life*, pages 38–47. MIT Press, 1997.

[Pia90] Jean Piaget. *Morphismes et catégories*. Delachaux & Niestlé, 1990.

[Pia92] Jean Piaget. *Le structuralisme*. Number 1311 in Que Sais-je ? Presses Universitaires de France, Paris, April 1992.

[PvG95] Robert F. Port and Timothy van Gelder, editors. *Mind as Motion*. Massachusetts Institute of Technology, 1995.

[Ree98] Jonathan A. Rees. A Reversible Object Interaction Calculus. Disponible à l'adresse http ://rosebud.ne.mediaone.net/jar/Rev/, 1998.

[Rob95] François Robert. *Les systèmes dynamiques discrets*. Springer-Verlag, 1995.

[Rod94] Miguel Rodriguez. *Approche Constructiviste de l'Architecture de Contrôle et de la Représentation des Connaissances*. PhD thesis, Université de Neuchâtel, September 1994.

[Ros91] R. Rosen. *Life Itself*. Columbia University Press, 1991.

[Sal97] Jean Sallantin. *Les agents intelligents*. Hermes, Paris, 1997.

[Sca96] Miriam Edith Scaglione. *L'intentionnalité et les modèles artificiels. Émergence et réalisation : deux côtés de la même pièce.* PhD thesis, Université de Neuchâtel, September 1996.

[TP75] Gérard Toulouse and Pierre Pfeuti. *Introduction au groupe de renormalisation et à ses applications.* Presses Universitaires de Grenoble, 1975.

[Vic95] Steven Vickers. Toposes *pour les nuls*. *Semantics Society Newsletter*, 4, 1995.

[Vic96] Steven Vickers. Toposes *pour les vraiment nuls*. In *Theory and Formal Methods 1996.* Imperial College Press, 1996.

[Woo97] Michael Wooldridge. A Knowledge-Theoretic Semantics For Concurrent MetateM. In *Intelligent Agents III*, pages 357–374. Springer-Verlag, 1997.

[YK99] Tomoyuki Yamamoto and Kunihiko Kaneko. Tile Automaton for Evolution of Metabolism. *Artificial Life*, 5 :37–76, 1999.